



## Karmaşık Sayılar Konusundaki Kavram Yanılgıları ve Hataları Belirlemek için Alternatif Bir Araç: Tanılayıcı Dallanmış Ağaç\*

### An Alternative Tool for Diagnosis of the Misconceptions and the Errors in Complex Numbers: Diagnostic Branched Tree Method

Gökhan KARAASLAN\*\*, Necla TURANLI\*\*\*

• *Geliş Tarihi:* 31.12.2016 • *Kabul Tarihi:* 07.08.2017 • *Yayın Tarihi:* 31.01.2018

**ÖZ:** Bilgiler, zihinde var olan bilgilerle ilişkilendirilerek öğrenilir. Yeni bilgilerin yanlış kavramlar üzerinde yapılandırılmaması için kavram yanılgılarının ve hataların belirlenmesi, sonrasında giderilmesi gerekir. Kavram yanılgıları ve hatalar çeşitli araçlarla belirlenebilir. Bunlardan biri, bir konuda öğrencilerin neler öğrendiğini veya hangi kavram yanılgılarına ve hatalara sahip olduklarını belirlemek için kullanılabilen “Tanılayıcı Dallanmış Ağaç” (TDA) tekniğidir. Bu teknik ile öğrencinin yanlış yapılandırılmış bilgileri ve bu bilgiler arasındaki hatalı ilişkiler ortaya çıkarılmaya çalışılır. İlgili alanyazında TDA tekniğinin öğrencide var olan kavram yanılgılarını ortaya çıkarmak için kullanılabileceği belirtilse de TDA tekniği ile kavram yanılgılarını belirlemeye yönelik çalışmaya rastlanmamıştır. Bu çalışmanın amacı, karmaşık sayılar konusuna yönelik kavram yanılgılarını ve hataları belirlemek için TDA tekniği kullanılarak alternatif bir test geliştirmektir. Karma yaklaşımın benimsendiği bu çalışmada Burdur ilindeki Anadolu Liselerinde öğrenim görmekte olan öğrencilere ilk olarak “Karmaşık Sayılar Teşhis Testi”, 3 hafta sonra “Karmaşık Sayılar TDA Testi” uygulanmıştır. Verilerin çözümlenmesinde betimsel istatistik ve analiz yöntemleri kullanılmıştır. Teşhis testi ile belirlenen hata ve yanılgılar TDA testiyle de ortaya çıkarılmıştır. TDA testi ve teşhis testindeki soruların doğru olarak cevaplanma yüzdeleri birbirine benzer çıksa da TDA testindeki soruların öğrenciler tarafından cevaplanma oranı daha yüksek çıkmıştır. TDA tekniğinin eğitimde bir öğrenme ve değerlendirme tekniği olarak kullanıldığı çalışmaların sınırlı olması yönüyle bu araştırmanın, hem ilgili alana hem programın uygulayıcısı olan öğretmenlere katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

**Anahtar sözcükler:** tanılayıcı dallanmış ağaç, karmaşık sayılar, öğrenci hatası, kavram yanılgısı, teşhis testi

**ABSTRACT:** Knowledge is built on existing knowledge by means of association. Accordingly, any misconception or error should be diagnosed and corrected so that new knowledge is not constructed on previously created misconceptions. Misconceptions and errors can be diagnosed by various means. One of them is the “Diagnostic Branched Tree” (DBT) method which can be used to identify students’ learning in a given subject as well as the misconceptions they have or the errors they make. This method reveals students misconceptions and wrong relations among the knowledge. There aren’t any studies in the area which use DBT to diagnose student misconceptions, although it is reported in the relevant literature that DBT method can be used to reveal such misconceptions. The aim of the study is to develop an alternative tool using the DBT method to diagnose student misconceptions and errors in relation to complex numbers topic. The study adopts a mixed-methods approach where students of Anatolian High Schools in Burdur province are given the “Complex Numbers Diagnostic Test” as the initial step and they are asked to complete the “Complex Numbers DBT Test” after an interval of 3 weeks. Descriptive statistics and analysis methods are adopted for the purposes of analyzing the data. Misconceptions and errors revealed by the diagnostic test have been reiterated by the DBT test, as well. The rate of the number of questions answered correctly in DBT test has turned out to be higher than that of the diagnostic test. Due to the low number of studies that employ DBT method as a tool for learning and evaluation, this study is expected to contribute to the literature and help teachers who implement the curriculum.

**Keywords:** diagnostic branched tree, complex number, student error, misconception, diagnostic test

\* Bu çalışma Prof. Dr. Necla TURANLI tarafından proje yürütücülüğü yapılan Hacettepe Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri kapsamında desteklenen 014 D05 704 002 – 627 nolu projenin bir özetidir ve 23-26 Nisan 2015 tarihinde Antalya’da düzenlenen Uluslararası Matematik, Bilim ve Teknoloji Eğitimi Kongresi’nde (ICEMST 2015) sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

\*\* Burdur Alpaslan Ali Can Bilim ve Sanat Merkezi, Burdur. Doktora Öğrencisi, Hacettepe Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Ankara-TÜRKİYE. E-posta: karaaslangokhan@yahoo.com (ORCID: 0000-0002-3859-5877)

\*\*\* Prof. Dr., Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, Ankara-TÜRKİYE. E-posta: turanli@hacettepe.edu.tr (ORCID: 0000-0001-8758-9054)

## 1. GİRİŞ

Eğitim sisteminde son yıllarda meydana gelen değişiklikler, matematik öğretim programlarının son 10 yıl içerisinde birkaç kez yenilenmesine ve güncellenmesine neden olmuştur. 2013 yılında yayımlanan ortaöğretim matematik dersi öğretim programında, programın ölçme değerlendirme yaklaşımının sadece bilgiyi ve sonucu ölçen bir yaklaşım yerine, süreci ölçen, öğrenmenin bir parçası olarak düşünülen bir yaklaşımı benimsediği belirtilmiştir. Bu doğrultuda ölçme sonuçları öğrenciye not vermenin yanında öğrencilerin kendilerini değerlendirmesine yardımcı olmak, öğrenci gelişimi ve öğrenme süreci hakkında bilgi edinmek ve sonuç olarak daha iyi bir öğretim gerçekleştirmek amacıyla kullanılmalıdır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013). Bu amaç ile geliştirilen alternatif ölçme değerlendirme tekniklerinin önemli özelliklerinden biri, sonuç odaklı olmayıp biçimlendirici bir ölçme modeli yansıtmasıdır (Yıldırım, 2011).

Alternatif değerlendirme farklı ölçme araçlarıyla uzun süreli gözlemler ile yapılan ölçümler sonucu öğrencinin performansını yorumlama işlemidir (Baki, 2006). Alternatif değerlendirme öğrencinin ne bildiği ile değil ne yapabileceği ile ilgilenir (Tan, 2009). Alternatif ölçme ve değerlendirme yaklaşımları yeni kavram ve becerilerin kazanılmasında, öğrencilerin matematiğe olan ilgilerini, ön bilgilerini, kavram yanılgılarını ve matematiksel iletişim becerilerini belirlemede yardımcı olmaktadır (Ben-Hur, 2006). Alternatif ölçme ve değerlendirme yöntemleri öğrencinin performansının değerlendirilmesini farklı yeterlik ve öğrenmelere dayalı olarak yapılmasını amaçlamaktadır (Tan, 2009). Ürün kadar sürecinde değerlendirilmesini dikkate alan alternatif değerlendirmelerde öğrencilerin yüksek düzeydeki düşünceleri, problem çözme ve yaratıcılıkları ön plana çıkarılır (Bahar, Nartgün, Durmuş ve Bıçak, 2006).

Alternatif ölçme ve değerlendirme yaklaşımlarından Tanılayıcı Dallanmış Ağaç (TDA) tekniği, belli bir konuda öğrencinin neleri öğrendiğini ve neleri öğrenemediğini belirlemek için kullanılabilen değerlendirme araçlarından biridir (Polat, 2011). TDA tekniği ilk defa Johnstone ve arkadaşları tarafından 1986 yılında kullanılmıştır (Johnstone, McAlpine & MacGuire, 1986). TDA tekniği, bir ağaç diyagramına yerleştirilen birbiriyle ilişkili önermelere, öğrencilerin doğru veya yanlış yanıtlar vererek bir sonuca ulaşmalarını sağlayan ve bu sayede öğrencilerin zihin yapılarındaki bilgi örüntüleri ile kavram yanılgılarını tespit etmeyi amaçlayan bir ölçme ve değerlendirme aracıdır (Kocaarslan, 2012). Bu teknik ile öğrencinin kafasındaki bilgi ağında yanlış yer etmiş bağıntılar, yanlış stratejiler ve sonuçta yanlış olan bilgi ortaya çıkarılmaya çalışılır ve bu etkili bir öğrenme ve öğretme sürecinde önemli bir rol oynayabilir (Bahar ve ark. , 2006). TDA tekniği doğru–yanlış tipindeki sorulardan oluşur. Öğrenciden doğru ve yanlış ifadeleri okuyarak doğru seçimi yapması istenir. TDA, doğru-yanlış maddelerinden oluştuğu için üst düzey bir zihinsel beceriyi ölçmede yetersiz kalacağı ve her madde için şans başarısının yüksek olacağı nedeniyle eleştirilmektedir (Çelen, 2014). Bu çalışma kapsamında hazırlanan TDA’da öğrencilerin doğru ve yanlış cevaplarının nedenlerini yazacakları her doğru-yanlış ayrımı için “NEDEN” kutucuğu oluşturulmuştur. Bu “NEDEN” kutucukları ile öğrencilerin neyi doğru ve yanlış bildikleri, nerede hata yaptıkları sebepleri ile belirlenmeye çalışılmıştır.

Hata ve kavram yanılgısı terimleri birbirleri ile karıştırılmakta ve birbirlerinin yerine kullanılabilir. Ancak hata, kavram yanılgısının bir sonucudur (Zembat, 2008). Kavram yanılgısı terimi, bir konuda uzmanların üzerinde hemfikir oldukları görüşten uzak kalan algı ya da kavrayıştır (Zembat, 2008). Başka bir ifadeye göre, öğrenmeye engel oluşturan kavramsal engellerdir (Ubuz, 1999). Kavram yanılgıları, öğrencilerin duyup gördüklerini anlamlandırmalarını ve algılamalarını etkiler (Hammer, 1996). Bilgiler, zihinde var olan bilgilerle ilişkilendirilerek öğrenildiğine göre öğrenilenlerin yanlış kavramlar üzerinde yapılandırılmaması için kavram yanılgılarının belirlenmesi ve giderilmesi gerekir. Kavram yanılgıları çeşitli yöntem ve araçlarla belirlenebilir. Bu yöntemlerden sıklıkla kullanılanlardan

biri de teşhis testleridir. Teşhis testleri belli bir konu ya da beceri alanında bireyin kuvvetli ya da zayıf yönleri hakkında ayrıntılı bilgi elde etmek ve kavram yanlışlarını belirlemek için kullanılır.

TDA tekniği, ön bilgilerin sorgulanması, konunun değerlendirilmesi gibi farklı öğretimsel amaçlar için kullanılabilir. İlgili alanyazında, TDA tekniğinin öğrencide var olan kavram yanlışlarını ortaya çıkarmak için de kullanılabilmesi belirtilmiştir (Karahana, 2007). Ancak yapılan literatür taraması sonucunda TDA tekniği ile kavram yanlışları ya da öğrenci hatalarını belirlemeye yönelik yapılan çalışmalara rastlanmamıştır. Bu durum çalışmanın önemini ortaya koymaktadır. Bu çalışmanın amacı, Karmaşık sayılar konusuna yönelik kavram yanlışlarını ve hatalarını belirlemek için TDA tekniği kullanılarak alternatif bir test geliştirmektir. TDA testinin sonuçları karmaşık sayılar konusundaki kavram yanlışlarını belirlemek için kullanılan teşhis testinin sonuçları ile karşılaştırılarak sunulmuştur. TDA tekniğinin eğitimde bir öğrenme ve değerlendirme tekniği olarak kullanıldığı çalışmaların da sınırlı olması yönüyle bu araştırmanın hem ilgili alana hem de programın uygulayıcısı olan öğretmenlere katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

## 2. YÖNTEM

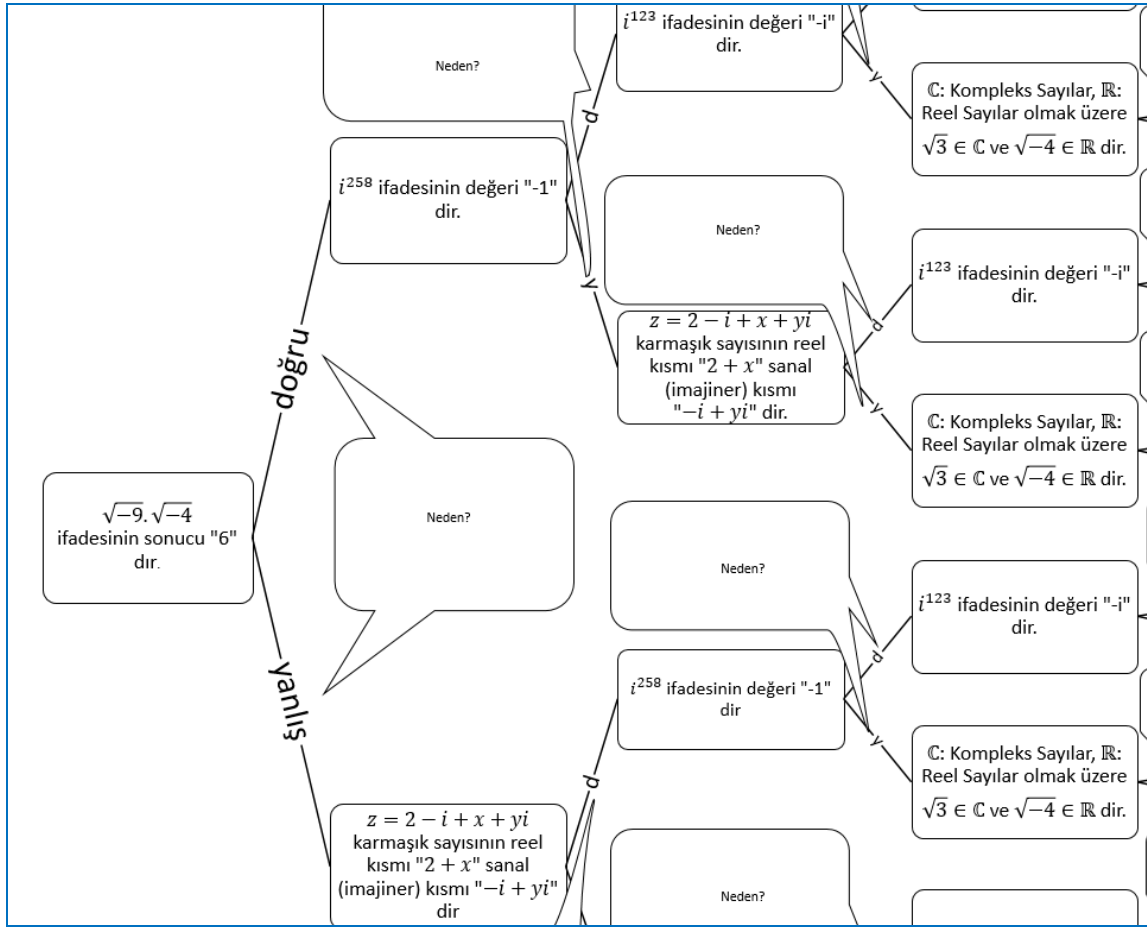
Ekiz (2009), nitel ve nicel yöntemlerin tek başına güçlü bir biçimde bir konuyu incelemesinin olanak dışı olduğunu belirtmiştir. Bu yüzden çalışmada nitel ve nicel yöntemlerin birlikte kullanıldığı “Karma Yaklaşım” benimsenmiştir (Çepni, 2010). Çalışmada öğrencilerin mevcut kavram yanlışları ve hatalarının belirlenmesi amaçlandığından bir olayın, ortamın, programın, sosyal grubun ya da diğer birbirine bağlı sistemlerin derinlemesine incelendiği yöntem olan durum çalışması (McMillan, 2000; Akt. Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz & Demirel, 2014) araştırmanın yöntemi olarak belirlenmiştir.

### 2.1. Örneklem

Araştırmanın örnekleme amaçlı örnekleme yöntemlerinden, araştırma problemi ile ilgili olarak evrende yer alan çok sayıda durumdan tipik olan bir durumun belirlenerek bu örnek üzerinden bilgi toplanmasını gerektiren tipik durum örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir (Büyüköztürk ve ark., 2014). Burdur ilindeki Anadolu liselerinde öğrenim gören 356 11.sınıf öğrencisi araştırmanın örneklemini oluşturmaktadır.

### 2.2. Veri Toplama Araçları

Çalışma kapsamında karmaşık sayılar konusuna yönelik öğrencilerin sahip oldukları ortak hata ve yanlışları ortaya çıkarmak için TDA testi hazırlanmıştır. TDA testinde yer alan maddeler Turanlı, Keçeli ve Türker (2007) tarafından hazırlanan, geçerlik ve güvenilirlik çalışmaları yapılmış Karmaşık Sayılar teşhis testindeki soruların TDA tekniğine uygun olarak tekrar düzenlenmesi ile oluşturulmuştur. Testin pilot uygulaması Burdur ilinde yer alan bir Anadolu Lisesi öğrencilerinde gerçekleştirilmiştir. Güvenirlik katsayısı (Cronbach Alpha) .73 olan teşhis testinden yararlanılarak hazırlanan TDA testinin güvenirlik katsayısı .76 olarak hesaplanmıştır. 3 matematik öğretmeni (bilim uzmanı) ve 3 öğretim üyesinden görüş alındıktan sonra gerekli değişiklikler yapılmış ve ölçek son halini almıştır. Tanılayıcı dallanmış ağaç testi 3 dallanmış ağaçtan oluşmaktadır. Her testte öğrencilerin sırayla cevaplama gereken 5 soru vardır. Bu çalışma kapsamında geliştirilen testlerin birinin bir bölümü Şekil 1’de yer almaktadır.



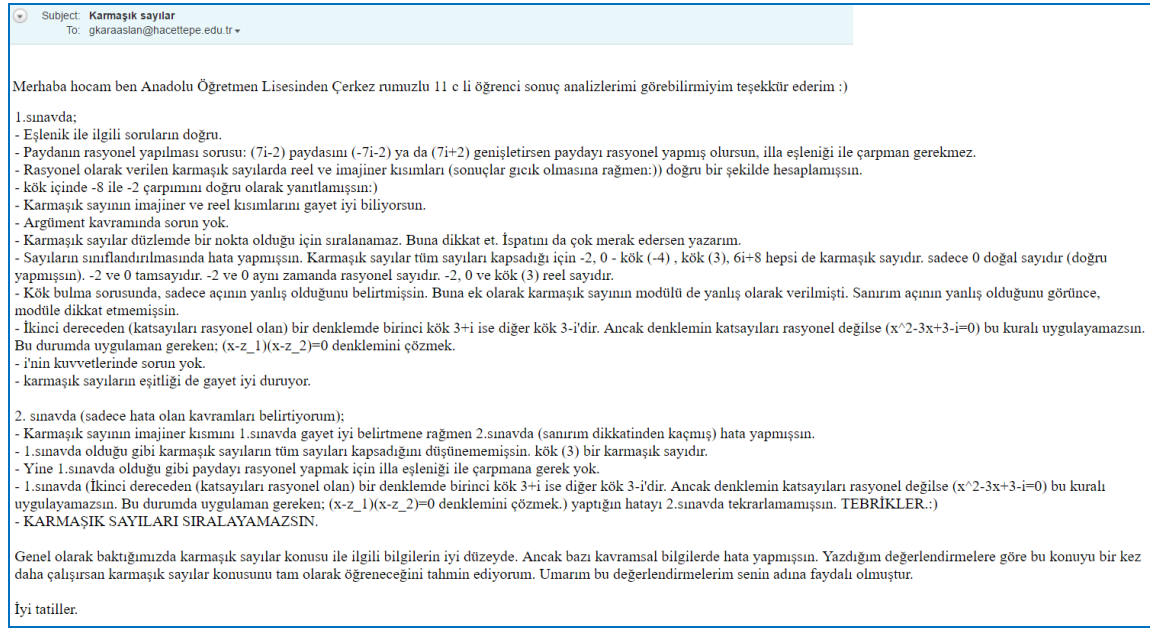
Şekil 1: Tda-1 testinin bir bölümü

Şekil 1’de yer alan TDA ölçeğinde öğrenciler verdikleri cevaplara göre ilerleyip toplam 5 soru cevaplayacaklardır. Cevapladıkları 5 soru sonunda 32 çıkıştan birinden çıkacaktır. Öğrencilerin çıkışlarına bakarak hangi soruyu doğru hangi soruyu yanlış yaptıkları kolayca belirlenir.

Araştırmada kullanılan diğer bir veri toplama aracı, öğrencilerin Karmaşık Sayılar konusundaki kavram yanılgılarını ve ortak hataları tespit etmek için kullanılmış “Karmaşık Sayılar Teşhis Testi” dir (Turanlı ve ark. , 2007). Bu testin güvenilirliği Cronbach Alpha katsayısı (0,73) ile belirlenmiş ve geçerliği için uzman görüşü alınmıştır.

### 2.3. Verilerin Analizi

Çalışma kapsamında Burdur ilindeki Anadolu liselerinde öğrenim görmekte olan 11.sınıf öğrencilerine ilk önce teşhis testi, 3 hafta sonra ise TDA testi uygulanmıştır. Öğrencilerin karmaşık sayılar konusundaki hataları ve kavram yanılgıları hem teşhis testi ile hem de TDA testi ile belirlenmiştir. İki ölçek öğrencilerin hatalarını ve kavram yanılgılarını ortaya çıkarma ve öğrencilerin soruları cevaplama durumlarına göre betimleyici istatistik kullanılarak analiz edilmiştir. Uygulama sonucunda test sonuçlarını ve hangi hatalara sahip olduklarını merak eden öğrencilere sonuçları e-mail yoluyla açıklanmıştır.



**Şekil 2: Öğrencilere test sonuçlarının e-mail yoluyla duyurulması**

### 3. BULGULAR

Bu çalışmaya, öğrencilerin karmaşık sayılar konusunda yaptıkları hataları ve kavram yanlışlarını alternatif ölçme ve değerlendirme yaklaşımları ile nasıl belirlenebilir? sorusu ile başlanmıştır. Ortaöğretim öğrencilerinin karmaşık sayılar konusundaki kavram yanlışlarının ve hatalarının ortaya çıkarıldığı çalışma (Turanlı ve ark., 2007) ile alternatif değerlendirme yöntemi tanılayıcı dallanmış ağacın kullanıldığı çalışmalar (Sheehan ve Skillman, 1998; Polat, 2011; Kocaarslan, 2012) bu çalışmanın başlangıç noktalarıdır.

Çalışmada ilk olarak 11. sınıf öğrencilerine teşhis testi uygulanmıştır. Bu test, öğrencilerin karmaşık sayılar konusuna yönelik kavram yanlışlarını ve hatalarını ortaya çıkarmak üzere hazırlanmış ve 2005-2006 öğretim yılında Ankara, Balıkesir ve Zonguldak'taki liselerde öğrenim gören 323 öğrenciye uygulanmıştır (Turanlı ve ark., 2007). Bu çalışmada ise Burdur ilindeki 5 Anadolu Lisesi'nde 356 öğrenciye uygulanmıştır. Karmaşık sayılar teşhis testi uygulandıktan 3 hafta sonra aynı öğrencilere tanılayıcı dallanmış ağaç testi uygulanmıştır. Tanılayıcı dallanmış ağaç testi 320 kişiye uygulanmıştır. Testin şekilsel özelliği bakımından sonuçlar teşhis testinin maddelerine paralel olarak verilmiştir.

#### 1. madde

##### *Teşhis Testi*

Bir karmaşık sayının eşleniğinin bulunması ile ilgili soruda öğrencilerin %86'sı soruyu doğru olarak cevaplamış, %10'u 2 sayısının eşleniğini -2 olarak kabul etmiş, %3'ü yanlış ya da anlamsız cevap vermiş, %1'i ise soruyu boş bırakmıştır.

#### *TDA*

Bir karmaşık sayının eşleniğinin sorulduğu bu madde tanılayıcı dallanmış ağaç testinde 2 tane soru olarak öğrencilere sorulmuştur. Birinci soruda  $i-2$  karmaşık sayısının eşleniğinin  $-i-2$  olduğu öğrencilere verilmiş ve bu ifadenin doğru olup olmadığı öğrencilere sorulmuştur. Öğrencilerin %91'i ( $n=292$ ) soruyu doğru, %9'u ( $n=28$ ) ise yanlış olarak cevaplamıştır.

Madde 1'in ikinci sorusunda 2 sayısının eşleniğinin -2 olduğu öğrencilere verilmiş ve bu ifadenin doğru olup olmadığı öğrencilere sorulmuştur. Birinci soruda olduğu gibi öğrencilerin %91'i (n=292) soruyu doğru, %9'u (n=28) ise yanlış olarak cevaplamıştır.

Bu sonuçlara göre 1.maddenin doğru yapıma yüzdesi teşhis testinde %86 iken TDA'da %91'e çıkmıştır. "Bir karmaşık sayının eşleniğini almada a reel sayısının eşleniğinin -a" olduğuna yönelik kavram yanılgısı teşhis testi sonucu öğrencilerin %10'unda, TDA testi sonucunda ise %9'unda ortaya çıkmıştır.

## 2.madde

### Teşhis Testi

Karmaşık sayılarda bölme işlemi yaparken paydanın reel sayı yapılmasındaki izlenen yolu ve işlem becerisinin belirlendiği iki sorudan meydana gelmektedir. 2.maddenin ilk sorusunda öğrencilere 2 yol önerilmiştir. Bunlardan birincisi paydayı eşleniği ile çarpmak, diğeri ise karmaşık sayının ikinci teriminin işaretinin değiştirilmesi ile meydana gelen sayı ile çarpmak. İki yoldan da payda reel sayı olmaktadır ve öğrencilerin sadece %17'si bu cevabı vermiştir. %71'i "Karmaşık sayılarda bir ifadenin paydasını reel sayı haline getirmek için sadece paydadaki ifadenin eşleniği ile çarpılması gerekir" gibi bir düşünceye sahiptir.

<p>2) a) Karmaşık sayılarda bölme işleminde paydanın reel sayı haline getirilebilmesi için aşağıda iki yol önerilmiştir. Her iki yoldan da doğru sonuca ulaşılabilir mi? Neden?</p> <p>I.Yol: <math>\frac{3+4i}{7i-2} = \dots\dots</math> II.Yol: <math>\frac{3+4i}{7i-2} = \dots\dots</math></p> <p><math>(-7i-2)</math> <math>(7i+2)</math> -49 -11</p> <p>b) <math>\frac{3+4i}{7-2i}</math> karmaşık sayı için <math>Re(z)</math> ve <math>Im(z)</math> yi bulunuz.</p> <p><math>(7+2i)</math> <math>21 + 28i + 6i^2 - 8 = \frac{13+34i}{53}</math></p>	<p>a) Sadece I. yoldan ubalılır. "karmaşık sayının eşleniği alınır yani "i"li ifadenin ekilli hali alınır.</p> <p>b) <math>Re(z) = \frac{13}{53}</math> <math>Im(z) = \frac{34}{53}</math></p>
--	--

### Şekil 3: Teşhis testindeki madde 2 için öğrenci cevabı

Şekil 3'de cevabı yer alan öğrenci de aynı kavram yanılgısına sahiptir. Bu kavram yanılgısına sahip öğrencilerin %16'sı (tüm öğrencilerin %10'u) ise "bi +a şeklinde verilen bir karmaşık sayının eşleniği bi-a dır" yanılgısına sahiptir. Öğrencilerin %5'i soruya anlamsız cevap vermişler ve %1'i de soruyu boş bırakmıştır.

2.maddenin ikinci sorusu karmaşık sayılarda bölme işlemi ile ilgili işlemsel bir sorudur. Öğrencilerin %64'ü bu soruyu doğru cevaplamışlardır. Şekil 3'deki çözüm de doğru bir çözümdür. Öğrencilerin %12'si sorunun çözümüne doğru yoldan başlamış ancak işlem hatası yaparak reel ya da sanal kısmı hatalı bulmuştur. Öğrencilerin %15'i soruya yanlış cevap vermiş, %9'u soruyu boş bırakmıştır.

### TDA

Teşhis testinin 2.maddesinde olduğu gibi TDA testinde de 2.madde iki sorudan oluşmaktadır. İlk soruda paydayı eşleniği ile çarpmak ve karmaşık sayının ikinci teriminin işaretinin değiştirilmesi ile meydana gelen sayı ile çarpmak üzere bu iki yolun paydanın reel sayı haline getirilebilmesi için kullanılabilmesi için kullanılabileceği verilmiştir. Bu ifadenin doğru olup olmadığı öğrencilere sorulmuştur. Öğrencilerin %19'u (n=60) soruyu doğru olarak cevaplamıştır. Öğrencilerin %64'ü (n=204) "Karmaşık sayılarda bir ifadenin paydasını reel sayı haline getirmek için sadece paydadaki ifadenin eşleniği ile çarpılması gerekir" ortak hatasına sahiptir. Teşhis testinde öğrencilerin %10'u (n=36) "bi +a şeklinde verilen bir karmaşık sayının

eşleniği bi-a dır” yanılığına sahipti. Ancak TDA testinde öğrencilerin bu yanılığa düşmedikleri gözlenmiştir. Öğrencilerin %10’u (n=32) soruya yanlış ya da anlamsız cevap vermiş ve %1’i de (n=4) soruyu boş bırakmıştır.

İkinci maddenin ikinci sorusu karmaşık sayılarda bölme işlemi ile ilgili işlemsel bir sorudur. Öğrencilere  $(4-7i)/(3+2i)$  karmaşık sayısının reel kısmının 3, sanal kısmının -2 olduğu verilmiş ve bu ifadenin doğru olup olmadığı sorulmuştur. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra karmaşık sayının reel kısmı  $-2/13$ , sanal kısmı da  $-29/13$  olarak bulunmaktadır. Öğrencilerin %44’ü (n=176) karmaşık sayının reel ve sanal kısmını doğru olarak bulmuştur. Öğrencilerin %16’sı (n=52) verilen karmaşık sayının paydasını reel sayı yapmak için paydayı doğru sayı ile çarpmış ancak ya reel kısmı doğru, sanal kısmı yanlış bulmuş ya da tam tersini yapmıştır. Öğrencilerin %10’u (n=80) verilen karmaşık sayının paydasını reel sayı yapmak için paydayı doğru sayı ile çarpmış ancak işlemin sonucunu getirememiş ya da reel ve sanal kısmı yanlış olarak hesaplamıştır. Öğrencilerin %9’u (n=28) ise  $(4-7i)/(3+2i)$  karmaşık sayısının reel kısmını  $4/3$ , sanal kısmını ise  $-7/2$  bulmuştur. Öğrencilerin yaptıkları hata; “ $(a+ib)/(c+id)$  karmaşık sayısının reel kısmı  $a/c$ , sanal kısmı  $b/d$ ” olarak hesaplamalarıdır. Teşhis testinde de bu hatayı öğrencilerin %9’u (n=32) yapmıştır. Öğrencilerin %13’ü (n=48) soruya yanlış ya da anlamsız cevaplar vermişlerdir.

İkinci maddenin birinci sorusunun doğru cevaplanma yüzdesi teşhis testinde %17 iken TDA testi sonucu %19’a çıkmıştır. İkinci soruda ise teşhis testinde öğrencilerin %64’ü soruyu doğru olarak cevaplandırırken TDA testinde bu oran %44’e düşmüştür. İkinci maddenin birinci sorusunda hem teşhis testi hem de TDA sonucunda “Karmaşık sayılarda bir ifadenin paydasını reel sayı haline getirmek için sadece paydadaki ifadenin eşleniği ile çarpılması gerekir” hatası %71 oranında öğrencilerde görülmüştür. “bi+a şeklinde verilen bir karmaşık sayısının eşleniği bi-a dır” kavram yanılığı ise sadece teşhis testi sonucu ortaya çıkmıştır ve öğrencilerin %10’unda görülmüştür.

3.madde

#### *Teşhis Testi*

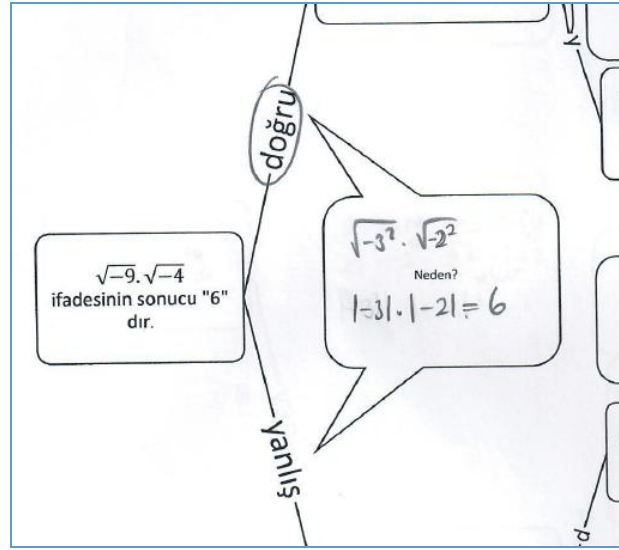
Reel sayılar kümesinde geçerli olan köklü ifadelerdeki çarpma kuralının karmaşık sayılarda geçerli olup olmadığının öğrencilere sorulduğu soruda  $\sqrt{-8}.\sqrt{-2}$  işleminin sonucunun 4 mü yoksa (-4) mü olduğu sorulmuştur. Öğrencilerin %73’ü doğru işlemler yaparak sonucu (-4) olarak bulmuştur. Öğrencilerin %24’ü “4” cevabını vererek “Reel sayılarda kümesinde geçerli olan  $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{a.b}$  kuralının, karmaşık sayılar kümesinde de geçerli olması” şeklinde kavramsal bir yanılığa sahiptir. Öğrencilerin %3’ü ise soruyu boş bırakmıştır.

#### *TDA*

TDA testinde “ $\sqrt{-9}.\sqrt{-4}$  işleminin sonucu 6’dır.” ifadesi öğrencilere verilmiş ve bu ifadenin doğruluğu sorulmuştur. Gerekli işlemler sonucu -6 olarak bulunması gereken sonucu öğrencilerin %76’sı (n=244) bulmuştur. Öğrencilerin %16’sı (n=52) “6” cevabını vererek “Reel sayılarda kümesinde geçerli olan  $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{a.b}$  kuralının, karmaşık sayılar kümesinde de geçerli olması” şeklinde kavramsal bir yanılığa düştükleri görülmektedir.

Teşhis testinde 3.soruyu öğrencilerin %73’ü doğru olarak cevaplandırmıştır. TDA testinde ise bu oran %76’ya çıkmıştır. 3.maddede ortaya çıkan “Reel sayılarda kümesinde geçerli olan  $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{a.b}$  kuralının, karmaşık sayılar kümesinde de geçerli olması” kavram yanılığı teşhis testinde öğrencilerin %24’ünde görülürken TDA testinde bu oran %16’ya düşmüştür.

Şekil 4’de bu sorunun cevabını 6 olarak bulan bir öğrencinin çözümü yer almaktadır.



Şekil 4: Tda testindeki madde 3 için öğrenci cevabı

Şekil 4'de öğrencinin yaptığı hata  $\sqrt{-(a)^2}$  ifadesini  $\sqrt{(-a)^2}$  gibi düşünmesinden kaynaklanmaktadır. Bu sebeple sorunun cevabını 6 bulmuştur.

4.madde

#### Teşhis Testi

Bir karmaşık sayının reel ve sanal kısımlarının buldurulmaya ve bu kısımların uygun bir biçimde gösterilip gösterilmediğinin araştırıldığı bu soruda öğrencilere ikiden fazla terim içeren, reel ve sanal kısımların karma bir biçimde verildiği bir karmaşık sayı verilmiştir. Verilen bu karmaşık sayının reel ve sanal kısımlarının gösterimine ait dört tane seçenek vardır. Öğrencilerin %55'i soruyu doğru olarak cevaplamıştır. Öğrencilerin %8'i verilen karmaşık sayının reel kısmı olan "2+x" ifadesinin (2,x) şeklinde gösterildiğini düşünüyor. %9'u ise verilen karmaşık sayının sanal kısmını "-1+y" olarak değil de "-i+yi" olarak kabul etmiştir. Öğrencilerin %21'i soruya anlamsız cevaplar vermiş, %7'si ise soruyu boş bırakmışlardır.

#### TDA

TDA testinde öğrencilere ikiden fazla terim içeren, reel ve sanal kısımların karma bir biçimde verildiği bir karmaşık sayı verilmiştir. Öğrencilere "2-i+x+yi karmaşık sayısının reel kısmı "2+x" sanal kısmı -i+yi'dir." ifadesi verilmiş ve bu ifadenin doğruluğu sorulmuştur. Soruda sanal kısım verilirken i sayısı da yazılmıştır ve öğrencilerin bunu doğru kabul edip etmediklerine dikkat edilmiştir. Öğrencilerin %21'i (n=68) soruya doğru cevap vermiştir. Öğrencilerin %65'i (n=208) verilen karmaşık sayının sanal kısmını "-1+y" olarak değil de "-i+yi" olarak kabul etmiştir.

Bu sorunun doğru cevaplanma yüzdesi teşhis testinde %55, TDA'da ise %21'dir. "Verilen bir karmaşık sayının reel kısmı olan a+x ifadesinin (a,x) şeklinde gösterme" hatası sadece teşhis testinde ortaya çıkmıştır ve öğrencilerin %8'inde görülmüştür. "a+ib karmaşık sayısının sanal kısmını b yerine ib olarak kabul etmek" hatası teşhis testinde öğrencilerin %9'unda gözlenirken TDA'da öğrencilerin %65'inde ortaya çıkmıştır.



## 5.madde

*Teşhis Testi*

Karmaşık sayıların argümentini belirlemeye yönelik olan bu maddede iki karmaşık sayı analitik düzlemde gösterilmiş ve bu karmaşık sayıların argümenti sorulmuştur. Öğrencilerin %65'i iki karmaşık sayının da argümentlerini doğru olarak hesaplamış, %16'sı 1.bölgede olan karmaşık sayının argümentini doğru hesaplamış ancak 3.bölgede yer alan karmaşık sayının argümentini doğru olarak hesaplayamamıştır. Öğrencilerin %8'i iki karmaşık sayının da argümentini yanlış hesaplamış, %12'si ise soruyu boş bırakmıştır.

*TDA*

Teşhis testinde olduğu gibi karmaşık sayıların argümentini belirlemeye yönelik olan bu maddede iki karmaşık sayı analitik düzlemde gösterilmiş ve bu karmaşık sayıların argümenti " $\text{Arg}(z_1)=70^0$ ,  $\text{Arg}(z_2)=40^0$ 'dir" diye öğrencilere verilmiş ve bu ifadenin doğruluğu sorulmuştur. Bu ifadede  $z_1$  sayısının argümenti doğru,  $z_2$  sayısının argümenti ise yanlış verilmiştir.  $z_2$  sayısının argümenti  $40^0$  değil  $230^0$ 'dir. Öğrencilerin %70'i (n=224) iki karmaşık sayının da argümentlerini doğru olarak hesaplamış, %13'ü (n=40) 1.bölgede olan karmaşık sayının argümentini doğru hesaplamış ancak 3.bölgede yer alan karmaşık sayının argümentini yanlış hesaplamıştır. Sadece 4 öğrenci iki karmaşık sayının da argümentini yanlış hesaplamış, %11'i ise soruya anlamsız cevap vermiş ya da soruyu boş bırakmıştır. Sorunun doğru yapıma oranı teşhis testine göre %65'den %70'e çıkmıştır.

## 6.madde

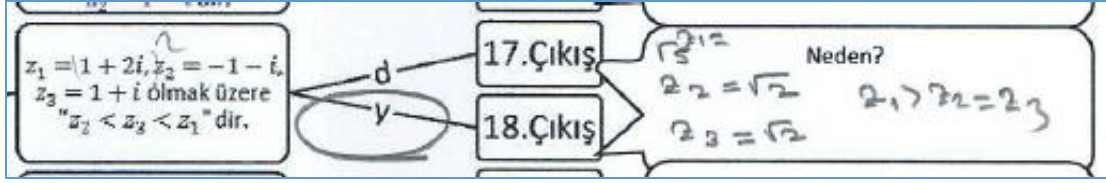
*Teşhis Testi*

Karmaşık sayılar kümesinde sıralama bağıntısının geçerli olup olmadığının sorulduğu soruda öğrencilerin sadece %16'sı (n=56) karmaşık sayılar kümesinde sıralama bağıntısının geçerli olmadığını belirtmiştir. Bu öğrencilerin %29'u (n=16; tüm öğrencilerin %5'i) sıralama bağıntısının geçerli olmamasının nedenini "Çünkü, böyle bir şey görmedik." diye cevaplamıştır. Sıralama bağıntısının karmaşık sayılarda geçerli olmadığını düşünen öğrencilerin %71'i ise (n=40, tüm öğrencilerin %11'i) neden olarak; "Sıralayamayız, çünkü karmaşık sayıları x eksenine mi yoksa y eksenine göre mi sıralanacağını bilmiyoruz." diye belirtmişler. Öğrencilerin %13'ü (n=48) sıralama bağıntısının geçerli olmadığını belirtmişler ancak bir neden belirtmemişlerdir. Öğrencilerin %60'ı (n=212) karmaşık sayılar kümesinde sıralama bağıntısının geçerli olduğunu belirtmişlerdir. Bu öğrencilerin %23'ü (n=48; tüm öğrencilerin %13'ü) neden olarak "Sıralanabilir, çünkü karmaşık sayı" diye belirtmiştir. Karmaşık sayıların sıralama bağıntısına sahip olduğunu düşünen öğrencilerin %15'i, (n=32; tüm öğrencilerin %9'u) karmaşık sayıların "uzunluklarına göre sıralanabilir" düşüncesine sahiptir. Karmaşık sayıların sıralanabileceğini düşünen öğrencilerin %19'u (n=40; tüm öğrencilerin %11'i) ise "karmaşık sayıları eşleniği ile çarpar öyle sıralarız" cevabını vermiştir. Öğrencilerin %11'i (n=40) soruyu boş bırakmıştır.

*TDA*

Karmaşık sayılar kümesinde sıralama bağıntısının geçerli olup olmadığının sorulduğu soruda öğrencilere " $z_1=1+2i$ ,  $z_2=-1-i$ ,  $z_3=1+i$  olmak üzere  $z_2 < z_3 < z_1$ 'dir." ifadesi verilmiş ve bu ifadenin doğruluğu öğrencilere sorulmuştur. Öğrencilerin %9'u (n=28) karmaşık sayıların sıralanamayacağını belirtmiştir. Öğrencilerin %71'i (n=228) verilen karmaşık sayıları sıralamıştır. Bu öğrencilerin %33'ü (n=76, tüm öğrencilerin %24'ü) "karmaşık sayıların

uzunluklarına göre sıralanabilir” hatasına sahiptir. Bu hataya sahip bir öğrencinin çözümü Şekil 5’de verilmiştir.



Şekil 5 Tda testindeki madde 6 için öğrenci cevabı

Bu hatanın tüm öğrenciler bazında görülme yüzdesi teşhis testinde %13 idi. TDA testinde bu oranın arttığı görülmektedir. Karmaşık sayıları sıralayan öğrencilerin %9’u (n=20, tüm öğrencilerin %6’sı) “karmaşık sayıları, reel ve sanal kısımlarındaki sayıların büyüklüklerine göre sıralanabilir” hatasına sahiptir. Bu hataya teşhis testinde gözlenmemiştir. Ayrıca teşhis testinde tüm öğrencilerin %11’inin yaptığı “karmaşık sayıları eşleniği ile çarpar öyle sıralarız” hatasına da TDA testinde rastlanmamıştır.

7.Madde

*Teşhis Testi*

Sayı kümeleri arasındaki ilişkiler hakkında olan 7.soruda  $-2, 0, \sqrt{-4}, \sqrt{3}, 6i+8$  sayıları verilmiş ve öğrencilerden bu sayıları N,Z,Q,R ve C kümelerinden uygun olana yerleştirmeleri istenmiştir. Öğrencilerin %84’ü (n=300) sadece 0 sayısını doğal sayılar kümesine yerleştirmiş. Öğrencilerin %15’i (n=52) 0 ve (-2) sayılarını tamsayı olarak kabul ederken, %64’ü (n=228) 0 sayısını tamsayı olarak kabul etmemiş ve sadece (-2) sayısını tamsayılar kümesine yerleştirmiştir. Öğrencilerin %9’u (n=32) rasyonel sayılar kümesine 0 ve (-2) sayılarını yerleştirmiştir. Öğrencilerin %11’i (n=40) reel sayılar kümesine  $-2, 0, \sqrt{3}$  sayılarını yerleştirmiştir. Öğrencilerin %9’u (n=32) verilen tüm sayıların karmaşık sayılar kümesine dâhil olduğunu belirtmiştir. Öğrencilerin %37’si (n=132) sadece  $\sqrt{-4}, 6i+8$  sayılarını karmaşık sayı olarak kabul etmiştir. Verilen tüm sayıları doğru sayı kümelerine yerleştiren öğrenciler %4’tür (n=12).

*TDA*

Teşhis testinde tüm sayı kümeleri arasındaki ilişkilerin sorgulandığı 7.madde, maddenin TDA formatına dönüştürülmesinin zorluğundan dolayı TDA testinde sadece reel sayılar kümesi ile karmaşık sayılar kümesi arasındaki ilişki irdelenmiştir. Öğrencilere “ $2 \in \mathbb{C}$  ve  $\sqrt{-4} \in \mathbb{R}$ ’dir” ifadesinin doğruluğu sorulmuştur. Karmaşık sayılar kümesi reel sayılar kümesini kapsadığı için 2 sayısı bir karmaşık sayıdır ancak  $\sqrt{-4}$  sayısı bir reel sayı değildir. Öğrencilerin %31’i (n=100) soruyu doğru cevaplamıştır. Öğrencilerin %46’sı (n=148) ise  $\sqrt{-4}$ ’ün reel sayı olmadığını belirtmiş ancak 2 sayısını karmaşık sayı olarak kabul etmemiştir. Bu hatanın nedeni “karmaşık sayılar kümesinin, reel sayılar kümesini kapsadığını düşünememektir”.

Teşhis testindeki maddenin öğrenciler tarafından doğru olarak cevaplanma yüzdesi %4 iken TDA’daki maddenin doğru cevaplanma oranı %31’dir. “Karmaşık sayılar kümesinin reel sayılar kümesini kapsadığını düşünememe” hatası öğrencilerin %37’sinde ortaya çıkarken TDA testinde öğrencilerin %46’sında gözlenmiştir.

## 8.Madde

*Teşhis Testi*

Karmaşık sayıların kareköklerinin sorulduğu 8.maddede bir karmaşık sayının kareköklerinin kümesi verilmiştir. Modülü ve derecesi doğru olarak verilen gösterimin öğrencilere doğru olup olmadığı sorulmuştur. Öğrencilerin %27'si (n=96) soruyu gerekli işlemleri yaparak doğru cevaplamışlardır. Öğrencilerin %10'u (n=36) "açıyı doğru, modülü yanlış" ya da tam tersi "modülü doğru, açıyı yanlış" hesaplamışlardır. Öğrencilerin %27'si (n=96) soruya yanlış ya da anlamsız cevaplar vermişlerdir. Öğrencilerin %29'u (n=104) soruyu boş bırakmıştır.

*TDA*

Bir karmaşık sayının kareköklerinin kümesinin verildiği soruda kareköklerin modülü ve derecesi yanlış olarak verilen gösterimin öğrencilere doğruluğu sorulmuştur. Öğrencilerin sadece %4'ünün (n=12) doğru cevap verebildiği bu soruyu teşhis testinde öğrencilerin %27'si doğru cevaplamıştı.

## 9.Madde

*Teşhis Testi*

İkinci dereceden bir denklemin karmaşık sayılar kümesindeki çözümünü bulmaya yönelik olan 9.maddenin ilk sorusunda reel katsayılı ikinci dereceden bir denklem ve bir kökü, 2.soruda ise reel katsayılı olmayan bir denklem ve bu denkleme ait bir kök verilmiş ve her iki soruda da ikinci köklerin bulunması istenmiştir. Reel katsayılı denklemin diğer kökünü öğrencilerin %78'i (n=276) doğru olarak bulmuştur. Doğru bulan öğrencilerin %61'i (n=168, tüm öğrencilerin %47'si) "Reel katsayılı ikinci dereceden bir denklemin köklerinden biri a+ib ise diğeri a-ib'dir." kuralını uygulamıştır. İkinci kökü doğru bulan öğrencilerin %14'ü (n=40, tüm öğrencilerin %11'i) kök bulma formülünden, %22'si (n=60, tüm öğrencilerin %17'si) iki kökün toplam ve çarpım bağıntısından, %3'ü ise (n=8, tüm öğrencilerin %2'si) kareye tamamlama yönteminden soruyu doğru olarak cevaplamışlardır. Öğrencilerin %3'ü (n=12) 1.soruda yanlış çözüm yapmış ve %19'u (n=68) ise soruyu boş bırakmıştır.

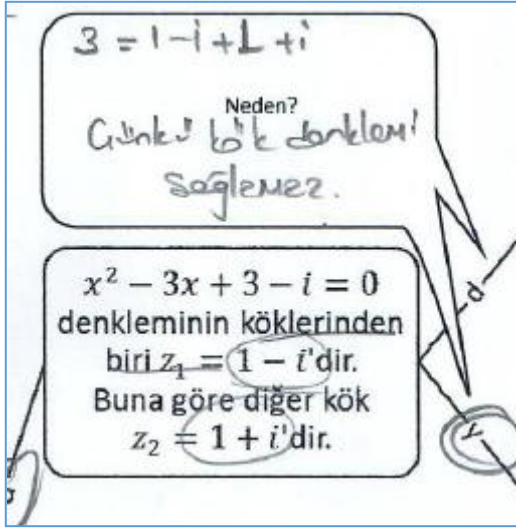
Reel katsayılı olmayan denklemin diğer kökünü öğrencilerin %22'si (n=80) doğru bulmuştur. Bu öğrencilerin %80'i (n=64, tüm öğrencilerin %18'i) iki kökün toplamı ve çarpımı bağıntısından ikinci kökü bulmuşlardır. Öğrencilerin %47'si (n=168) reel katsayılı olmayan denklemin ikinci kökünü bulurken yanlış ya da anlamsız çözüm yapmışlardır. Öğrencilerin %44'ünde (n=156) "Reel katsayılı ikinci dereceden bir denklemin köklerinden biri a+ib ise diğeri a-ib'dir kuralını reel katsayılı olmayan bir ikinci dereceden denkleme genelleme" yanılıgısına sahiptir. Öğrencilerin %29'u (n=104) 9.maddenin 2.sorusunu boş bırakmıştır.

*TDA*

İkinci dereceden bir denklemin karmaşık sayılar kümesindeki çözümünü bulmaya yönelik olan 9.maddenin ilk sorusunda reel katsayılı ikinci dereceden bir denklem olan  $x^2 - 6x + 10 = 0$ 'ın köklerinden birinin 3+i olduğu verilmiş ve buna göre diğer kökünün 3-i olduğu belirtilmiştir. Bu ifadenin doğruluğunun sorgulandığı soruya öğrencilerin %81'i (n=260) doğru cevap vermiştir. Bu öğrencilerin 55'i (n=144, tüm öğrencilerin %45'i) "Reel katsayılı ikinci dereceden bir denklemin köklerinden biri a+ib ise diğeri a-ib'dir." kuralını uygulamıştır. Bu oran teşhis testinde tüm öğrenciler bazında %47 idi. Doğru cevap veren öğrencilerin %8'i (n=20, tüm öğrencilerin %6'sı) kök bulma formülünden (teşhis testinde bu oran tüm öğrenciler bazında %11 idi), %24'ü (n=64, tüm öğrencilerin %20'si) iki kökün toplam ve çarpım

bağıntısından (teşhis testi=%17), %3'ü ise (n=8, tüm öğrencilerin %2'si) kareye tamamlama yönteminden soruyu doğru olarak cevaplamışlardır (teşhis testi=%2). TDA testindeki soru, verilen 2.kökün doğru olup olmadığına yönelik olduğu için doğru cevap veren öğrencilerin %5'i (n=12, tüm öğrencilerin %4'ü) verilen ikinci kökü yerine koymuş ve sağladığını gördüğü için doğru cevabı vermiştir.

9.maddenin ikinci sorusunda reel katsayılı olmayan  $x^2 - 3x + 3 - i = 0$  denkleminin köklerinden birinin "1-i" olduğu verilmiş ve buna göre diğer kökün "1+i" olduğu belirtilmiştir. Bu ifadenin doğruluğunun sorgulandığı ikinci soruda öğrencilerin %33'ü (n=104) doğru cevap vermiştir. Teşhis testinde %22 olan doğru cevap verme yüzdesi TDA testinde artmıştır. Şekil-6'daki öğrenci gibi soruyu doğru cevaplayan öğrencilerin %69'u (n=72, tüm öğrencilerin %20'si) iki kökün toplamı ve çarpımı bağıntısını kullanmış ve sağlamadığını görmüştür.



Şekil 6: Tda testindeki madde 9 için öğrenci cevabı

Bu oran teşhis testinde tüm öğrenciler bazında %18 idi. Maddenin ilk sorusunda olduğu gibi öğrencilerin %15'i (n=16, tüm öğrencilerin %5'i) doğruluğu sorgulanan ikinci kökü denkleme yerine yazmış ve sağlamadığını görmüşlerdir. Öğrencilerin %45'i (n=144) "Reel katsayılı ikinci dereceden bir denklemin köklerinden biri a+ib ise diğeri a-ib'dir kuralını reel katsayılı olmayan bir ikinci dereceden denkleme genelleme" yanılıgına düşmüşlerdir. Bu oran teşhis testinde de %44 idi. Aynı yanılıgının iki testte de yapılma oranı birbirine oldukça yakındır.

10.Madde

*Teşhis Testi*

i'nin kuvvetleri ile ilgili 10.soruda i'nin 100. ve 257. kuvvetleri sorulmuştur. i'nin 100. kuvvetini öğrencilerin %89'sı (n=316) doğru, %10'u yanlış (n=36) hesaplamıştır. Öğrencilerin sadece %1'i (n=4) soyu boş bırakmıştır.

i'nin 257. kuvvetini ise öğrencilerin %91'i (n=324) doğru, %8'i (n=28) yanlış hesaplamıştır. Öğrencilerin sadece %1'i (n=4) soruyu boş bırakmıştır.

*TDA*

i'nin kuvvetleri ile ilgili 10.soruda i'nin 123. ve 258. kuvvetleri sorulmuştur. i'nin 258. kuvvetini öğrencilerin %88'i (n=280) doğru, %12'si yanlış (n=40) hesaplamıştır. i'nin 123. kuvvetini ise öğrencilerin %90'u (n=288) doğru, %10'u (n=32) yanlış hesaplamıştır. Hem teşhis

testinde hem de TDA testinde öğrencilerin büyük bir çoğunluğu  $i$  sayısının kuvvetlerini doğru hesapladığı ve ortak bir hataya sahip olmadığı gözlenmiştir.

#### 11.Madde

##### *Teşhis Testi*

Bir karmaşık sayı ve o karmaşık sayının eşleniğini içeren bir denklemi çözme becerilerini belirlemeye yönelik olan 11.soruda  $(3+i)z=2-z$  şeklinde bir denklem verilip  $z$  karmaşık sayısı sorulmuştur. Öğrencilerin %43'ü ( $n=152$ )  $z$  karmaşık sayısını doğru olarak bulmuştur. Öğrencilerin %23'ü ( $n=72$ )  $z=x+iy$  yazarak soruya başlamış ancak devam ettirememiştir. Öğrencilerin %26'sı ( $n=92$ )  $z$  yerine  $x+iy$  yazmış ancak işlem hatasından dolayı  $z$  karmaşık sayısının reel ya da sanal kısmını yanlış bulmuşlardır. Öğrencilerin %8'i ( $n=28$ ) soruyu yanlış cevaplamışlardır.

##### *TDA*

Bir karmaşık sayı ve o karmaşık sayının eşleniğini içeren bir denklemin çözüm kümesinin sorulduğu bu soruda öğrencilere  $(2+i)z=3+z$  denkleminin çözüm kümesinin  $z=9/4-3/4i$  olduğu verilmiş ve bu ifadenin doğruluğu sorulmuştur. Öğrencilerin %35'i ( $n=112$ ) doğru cevap vermiştir. Öğrencilerin %39'u ( $n=124$ )  $z$  yerine  $x+iy$  yazmış ancak işlem hatasından dolayı  $z$  karmaşık sayısının reel ya da sanal kısmını hatalı bulmuşlardır.

Teşhis testi ile belirlenen hata ve yanlışların çoğunun çalışma kapsamında hazırlanan TDA testi ile de belirlenmiştir. “bi +a şeklinde verilen bir karmaşık sayının eşleniği bi-a dır” kavram yanlışlığı, “Verilen bir karmaşık sayının reel kısmı olan a+x ifadesinin (a,x) şeklinde gösterme” hatası, “Karmaşık sayıları eşleniği ile çarpıp çıkan sonucu sıralama” hatası teşhis testi ile belirlenen ancak TDA ile belirlenemeyen hata ve yanlışlardır. “Karmaşık sayıları, reel ve sanal kısımlarındaki sayıların büyüklüklerine göre sıralama” hatası da TDA testi ile belirlenip teşhis testi ile belirlenemeyen bir hata olmuştur.

Karmaşık sayılar konusu için hazırlanan TDA testi ile teşhis testinde yer alan maddelerin cevaplanma yüzdeleri Tablo-1’de verilmiştir.

**Tablo 1: TDA ve teşhis testlerinde yer alan maddelerin cevaplanma yüzdeleri**

Madde No	Teşhis Testi			TDA		
	Doğru (%)	Yanlış (%)	Boş (%)	Doğru (%)	Yanlış (%)	Boş (%)
1	86	13	1	91	9	-
2-1	17	82	1	19	80	1
2-2	64	27	9	44	56	-
3	73	24	3	76	24	-
4	55	38	7	21	79	-
5	65	23	12	70	19	11
6	16	73	11	9	91	-
7	4	96	-	31	69	-
8	27	44	29	4	96	-
9-1	78	3	19	81	19	-
9-2	22	49	29	33	67	-
10-1	89	10	1	88	12	-
10-2	91	8	1	90	10	-
11	43	57	-	35	65	-

Tablo 1’de de görüldüğü üzere öğrencilerin TDA da yer alan soruların cevapları hakkında doğru veya yanlış seçeneklerinden birini tercih etmeleri gerektiğinden TDA da ki soruların yanıtlanma oranı oldukça yüksektir. Ayrıca öğrenciler doğru veya yanlış tercihlerini

matematiksel işlem ya da ifadeler ile desteklemediği sürece verdikleri cevaplar “anlamsız” olarak değerlendirilmiştir. Genel olarak öğrencilerin soruları doğru cevaplama yüzdeleri karşılaştırıldığında TDA testi sonuçlarının daha yüksek olduğu görülmektedir. Bu sonuç öğrenciler ile paylaşıldığında, testin ilgi çekici olduğunu ve bu yüzden soruları daha dikkatli okuduklarını ve cevapladıklarını belirtmişlerdir. Ayrıca öğrencilerin soruların nedenlerini yazarken zorlandıkları gözlemlenmiştir.

#### 4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Karmaşık sayılar konusunda öğrencilerin sahip oldukları ortak hata ve yanılgıları ortaya çıkarabilmek için literatürde var olan teşhis testlerine alternatif bir test geliştirmek amacı ile bu çalışma kapsamında alternatif ölçme değerlendirme yaklaşımlarından biri olan tanılayıcı dallanmış ağaç (TDA) tekniği ile TDA testi geliştirilmiştir. Bu testin öğrencilere uygulanması sonucunda öğrencilerin sahip olduğu ortak hata ve yanılgılar ortaya çıkarılmıştır.

Öğrenciler,

- i. Sadece reel kısımdan oluşan a karmaşık sayının eşleniğinin -a olması şeklinde bir yanılgıya (%9),
- ii. Karmaşık sayılarda rasyonel bir ifadenin paydasını reel sayı haline getirmek için sadece paydadaki ifadenin eşleniği ile çarpılması gerekir şeklinde ortak bir hataya (%64),
- iii.  $(a+ib)/(c+id)$  karmaşık sayısının reel kısmı a/c, sanal kısmı b/d olarak hesaplama hatasına (%9),
- iv. Reel sayılarda kümesinde geçerli olan  $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{a.b}$  kuralının, karmaşık sayılar kümesinde de geçerlidir şeklinde bir hataya (%16),
- v.  $a+ib$  şeklindeki karmaşık sayının sanal kısmının b yerine ib olarak gösterilmesi hatasına (%65),
- vi. Karmaşık sayılarda sıralama bağıntısı geçerlidir şeklindeki ortak hataya (%71),
- vii. Karmaşık sayıların modülleri hesaplanarak sıralanabileceği ortak hatasına (%24),
- viii. Karmaşık sayılar kümesinin diğer sayı kümelerini kapsamadığına dair hataya (%46),
- ix. Reel katsayılı ikinci dereceden bir denklemin köklerinden biri  $a+ib$  ise diğeri  $a-ib$ 'dir kuralını reel katsayılı olmayan bir ikinci dereceden denkleme genelleme yanılgısına sahiptirler (%45).

Ayrıca öğrencilerin karmaşık sayıların köklerini almada da (%73) öğrencilerin zorlandığı görülmektedir.

Öğrencilerin sahip oldukları yanılgılar, literatürdeki diğer çalışmalarla da benzerlik göstermektedir.  $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{a.b}$  kuralının, karmaşık sayılar kümesinde de geçerli olduğu yanılgısı gibi öğrendikleri bir kuralı genelleme eğilimi Şenay(2002), Turanlı ve ark. (2007) ve Özdemir'in (2006) çalışmalarında da ortaya çıkmıştır. “Karmaşık sayılarda sıralama bağıntısı geçerlidir” yanılgısı ile ilgili benzer bir sonuç Özdemir'in (2006) çalışmasında ortaya çıkmıştır. Bu çalışmada öğrencilerin i sayısı ile bir reel sayıyı karşılaştırma veya karşılaştırıp karşılaştırmayacağını bilme ile ilgili eksiklik yaşadıkları belirtilmiştir. Diğer belirlenen kavram yanılgıları da Turanlı ve ark. (2007) ile Keçeli'nin (2007) çalışmalarında belirlenen yanılgılarla benzerlik göstermektedir.

Teşhis testinin sonucunda belirlenen ortak hata ve yanılgılar TDA testi ile de ortaya çıkarılmıştır. İlgili alanyazında TDA ile öğrencilerin kavram yanılgılarının belirlenebileceği yer almaktadır (Karahan, 2007; Kocaarslan, 2012). Ancak bununla ilgili bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu çalışma TDA tekniği ile kavram yanılgılarının belirlenebileceğine dair somut bir örnektir. Karmaşık sayılar konusunda ortaya çıkan bu hataların sebepleri çalışmanın konusu olmasa da karmaşık sayıların oluşturulmasında 2.dereceden denklemleri çözmek için i'nin varlığının kabul edilmesi, çarpma işleminin tanımlanması ve sanal kısmın reel sayı kümesinden farkının belirtilmesi yolları kullanılabilir (Cuoco, 1997).

Birinci ve üçüncü maddede belirlenen kavram yanılgıları teşhis testine göre TDA'da daha düşük oranla ortaya çıkmıştır. Bu sonuç kavram yanılgılarının TDA ile giderilebileceği şeklinde yorumlanabilir. Şahin ve Çepni (2011) araştırmalarında TDA tekniğinin öğrencilerde ortaya çıkan kavram yanılgılarının değiştirilmesinde kullanılabilir etkili bir araç olduğunu belirtmişlerdir.

Kavram yanılgıları bireyin zihinsel bilgi yapılanması ile ilgilidir ve bu yapılanma skaler bir büyüklük olmadığı için kolaylıkla ölçülememektedir (Keçeli, 2007). Kavram yanılgısını belirlemek için kullanılacak olan aracın bireyin düşünceleri hakkında ayrıntılı bilgi elde edebilmelidir. TDA testi doğru yanlış maddelerinden oluştuğu için hangi kavramda hata olduğunu ortaya konulabilir ancak bu kavram hakkında ayrıntılı bilgi elde etmeyi sağlamaz (Polat, 2011; Kocaarslan, 2012 & Çelen, 2014). TDA tekniğinin bu olumsuz yanını ortadan kaldırmak ve öğrencilerin sorulara verdikleri cevapları detaylandırmak için her doğru-yanlış ayırımına "NEDEN" kutucukları yerleştirilmiştir. Bu kutucuklara yazılan açıklamalar ile öğrencilerin cevapları ayrıntılı olarak analiz edildi.

Testlerdeki maddeler analiz edilirken bazı sonuçlar dikkat çekmiştir. Bunlardan bir tanesi "2-i+x+yi karmaşık sayısının reel kısmı "2+x" sanal kısmı -i+yi'dir." İfadesinin doğruluğunun sorulduğu 4.maddedir. TDA testinde öğrencilerin %21'i soruya doğru cevap vermiş, %65'i verilen karmaşık sayının sanal kısmını "-1+y" olarak değil de "-i+yi" olarak kabul etmiştir. Teşhis testinde ise öğrencilerin bu soruyu doğru cevaplama oranı %55, yapılan ortak hatanın oranı ise %9 dur. Bu kadar farkın çıkmasının sebebi sorunun soruluş şekli ve ifadenin yanlış olarak verilmesi olabilir.

Diğer bir madde bir karmaşık sayının kareköklerinin modülü ve derecesi yanlış olarak verilen gösterimin öğrencilere doğruluğunun sorulduğu 8.maddedir. TDA testinde öğrencilerin sadece %4'ünün doğru cevap verebildiği bu soruyu teşhis testinde öğrencilerin %27'si doğru cevaplamıştı. Teşhis testinde kareköklerin modülü ve açısı doğru, TDA testinde ise yanlış verilmiştir. Bu ayırımın öğrencilerin soruyu doğru cevaplamalarını önemli ölçüde etkilediği düşünülmektedir. Ayrıca bu maddenin doğru cevaplanma yüzdesi çok düşük çıkmıştır. Karmaşık sayıların trigonometri ile ilişkili olduğu konusu karmaşık sayıların kutupsal gösteriminin öğretiminde görselleştirme için bilgisayarın kullanılabilirliği literatürde vurgulanmıştır (Hamersma, 2002).

TDA testinin biçimsel özelliği bakımından öğrencilerin soruları cevaplama yüzdesi teşhis testine göre artmıştır (%99-%91). TDA testinin teşhis testlerine göre diğer bir avantajı ise öğrencilerin çıkış noktaları incelenerek hangi sorularda hata yaptıklarının kolayca belirlenebilmesidir (Polat, 2011; Kocaarslan, 2012). Öğrencilerin soruların cevaplarını ayrıntılı bir şekilde yazabilecekleri klasik bir değerlendirme aracı olan teşhis testinin bu özelliği TDA testinde oluşturulan "Neden" kutucukları ile sağlanmaya çalışılmıştır. Ancak öğrencilerin soruların nedenlerini yazarken zorlandıkları gözlemlenmiştir. Bunun öğrencilerin çoktan seçmeli sorulara alışmalarından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Çalışmaya katılan öğrencilerin sahip olduğu hata ve yanılgılar öğrenciler ile paylaşılacak üzere okul idarelerine İl Milli Eğitim Müdürlüğü tarafından gönderilmiştir. Ayrıca istekli olan öğrenciler ile mail yoluyla sahip olduğu hata ve yanılgılar da paylaşılmıştır. Böylece bu uygulamadan bir sene sonra üniversite sınavına girecek öğrencilerin karmaşık sayılar konusunda sahip oldukları hataları bilmesi, onlara sınav hazırlıklarında katkı sağladığı düşünülmektedir.

TDA ile yapılan çalışmalarda kavram yanılgısını belirlemeye yönelik bir çalışma rastlanmamıştır. Ancak ilgili literatürde TDA tekniğinin bu amaç ile kullanılabilirliği belirtilmiştir (Karahan, 2007). Bu çalışma ilgili literatürdeki bu boşluğu dolduracağı düşünülmektedir. Çalışmada TDA testine eklenen "Neden" kutucukları ile TDA tekniği öğrenci cevaplarını sebepleri ile ortaya koyan ve şans başarısı oldukça düşük olan bir araç haline

gelmiştir. Karmaşık sayılar konusundan farklı konularda da öğrencilerin sahip olduğu hata ve yanılgıları ortaya çıkarmak için TDA testleri hazırlanabilir. Ayrıca öğretmenler yazılı sınavlarının birini ya da bir bölümünü TDA testi hazırlayarak öğrencilerin öğrenme düzeylerini ve hatalarını öğrenebilirler.

## 5. KAYNAKLAR

- Bahar, M., Nartgün, Z., Durmuş, S. & Bıçak, B. (2006) *Geleneksel – alternatif ölçme ve değerlendirme öğretmen el kitabı*. Ankara: PegemA Yayıncılık.
- Baki, A. (2006). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi* (3. Bs.). Trabzon: Derya Kitabevi
- Ben-Hur, M. (2006). *Concept-rich mathematics instruction. Association for supervision and curriculum development*. Virginia, USA: Alexandria,
- Büyüköztürk, Ş., K. Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. & Demirel, F. (2014). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (18. Bs.). Ankara: Pegem Akademi
- Cuoco, A. (1997). Constructing the complex numbers. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2(2), 155-186.
- Çelen, Ü. (2014). Tanılayıcı dallanmış ağacın psikometrik özellikleri. *Eğitim ve Bilim*, 174 (39), 201-213.
- Çepni, S. (2010). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş*. (5. Bs.). Trabzon.
- Ekiz, D. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (2. bs.). Ankara: Anı yayıncılık.
- Hammer, D. (1996). More than misconceptions: Multiple perspectives on student knowledge and reasoning, and an appropriate role for education research. *American Journal of Physics*, 64 (10), 1316 – 1325.
- Hamersma, P. S. (2002). *Effects of using a computer-based visualization tool to learn complex numbers in trigonometry*. PhD diisertation, University of South Florida, FL, USA.
- Johnstone, A. H., McAlpine, E., & MacGuire, P. R. P. (1986). Branching trees and diagnostic testing. *A Journal for Further and Higher Education in Scotland* 2, 4-7.
- Karahan, U. (2007). *Alternatif ölçme ve değerlendirme metodlarından grid, tanılayıcı dallanmış ağaç ve kavram haritalarının biyoloji öğretiminde uygulanması*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Keçeli, V. (2007). *Karmaşık sayılarda kavram yanılgısı ve hata ile tutum arasındaki ilişki*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.
- Kocaarslan, M. (2012). Tanılayıcı dallanmış ağaç tekniği ve ilköğretim 5. sınıf fen ve teknoloji dersi maddenin değişimi ve tanınması adlı ünite de kullanımı, *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 9 (18), s.269-279.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013). *Ortaöğretim matematik dersi (9,10, 11 ve 12.Sınıflar) öğretim programı*. Ankara.
- Özdemir, M. F. (2006). *Ortaöğretimde Kompleks Sayılarla İlgili Kavram Yanılgılarının Belirlenmesi ve Çözüm Önerileri*, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Polat, B. (2011). *Vee diyagramı, tanılayıcı dallanmış ağaç ve kavram haritalarının matematik dersine yönelik tutum ile başarıya etkileri ve bu araçlara yönelik öğretmen görüşleri*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.
- Sheehan, K. M. & Skillman, N. J. (1998). *Tree-based approach to proficiency scaling and diagnostic assessment*. United States Patent, 6144838.
- Şahin, Ç. Ve Çepni, S. (2011). Developing of the Concept Cartoon, Animation and Diagnostic Branched Tree Supported Conceptual Change Text: “Gaz Pressure”, *Eurasian J. Phys. Chem. Educ.*, January (Special Issue): 25-33.
- Şenay, Ş. C. (2002). *Üslü ve Köklü Sayıların Öğretiminde Öğrencilerin Yaptıkları Hatalar ve Yanılgıları Üzerine Bir Araştırma*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Tan, Ş. (2009). *Öğretimde ölçme ve değerlendirme*. (3. bs.) Ankara: Pegem Akademi.



- Turanlı, N., Keçeli, V. & Türker, N. M. (2007). Ortaöğretim ikinci sınıf öğrencilerinin karmaşık sayılara yönelik tutumları ile karmaşık sayılar konusundaki kavram yanlışları ve ortak hataları, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 9 (2), 135-149.
- Ubuz, B. (1999). 10. ve 11. sınıf öğrencilerinin temel geometri konularındaki hataları ve kavram yanlışları, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 16(17), 95 – 104.
- Watt, H. M. G. (2005). Attitudes to the use of alternative assesment methods in mathematics: A study with secondary mathematics teachers in Sydney, *Australia, Educational Studies in Mathematics*, 58: 21-24.
- Yıldırım, İ. (2011). *Teknoloji destekli matematik öğretimi çerçevesinde alternatif ölçme araçlarının kullanımı*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Gaziantep.
- Zembat, İ. Ö. (2008). Kavram Yanılgısı Nedir? M. F. Özantar, E. Bingölbali & H. Akkoç (Eds), *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* (ss. 1-8), Ankara: Pegem Akademi.

### Extended Abstract

Alternative assessment and evaluation tools are used in order to assess student development and learning process, to help students self-evaluate and to conduct a better teaching practice. Alternative assessment and evaluation tools developed for these purposes are not result-oriented and appear as formative assessment models. Diagnostic Branched Tree (DBT) method is an alternative assessment and evaluation tool used to identify what students have or have not been able to learn about a subject. DBT method aims to reveal false associations, erroneous strategies and finally misconceptions in the cognitive knowledge networks of students.

DBT method is criticized as ineffective due to two reasons: Firstly, it is considered insufficient to identify higher levels of cognitive skills. Secondly, it might lead to high effects of chance per item, i.e. the probability of guessing the items right by chance is high since it is made up of true-false items. DBT test prepared for this study included a “REASON” box for each true-false item where students were asked to explain why they responded true or false.

The aim of the study is to develop an alternative tool using the DBT method to diagnose student misconceptions and errors in relation to complex numbers topic. It is confirmed by the relevant literature that DBT method can be used to identify students’ existing misconceptions. However, no studies can be found in literature which explores student misconceptions or errors by means of DBT method. Due to the low number of studies that employ DBT method as a tool for learning and evaluation, this study is expected to contribute to the literature and help teachers who implement the program.

The current study adopted a mixed-methods approach, that is it included the mixing of qualitative and quantitative research methods with case study employed as the primary research method. The study population consisted of 356 grade 11 students of Anatolian High Schools in Burdur province. Within the scope of the study, the DBT test, as previously stated, was devised to understand student misconceptions and errors in complex numbers topic. To that end, the questions in the diagnostic test for complex numbers were reorganized in accordance with DBT method after they were checked for reliability and validity. After the pilot scheme and expert opinions were received, some necessary amendments were made on the test and the test took its final form. Initially, students completed the diagnostic test and 3 weeks later, they were given the DBT test. These two assessment tools were analyzed through descriptive statistics according to their level of efficiency both in revealing the student misconceptions and errors and in eliciting response from the students.

DBT method helps define in which questions students make mistakes by assessing the output branch they reach. Besides, it helps question the students’ prior knowledge and assesses the topics. Although it is possible to discover the concepts in relation to which students make mistakes, it may not be possible to obtain detailed information about these concepts; because the test consists of true-false items. In order to eliminate this disadvantage of DBT method, a “REASON” box for each true-false item was included in the test. In this way, students could explain why they responded true or false to the item. Students’ answers were analyzed in the light of the explanations provided in these boxes.

Misconceptions and errors revealed by the diagnostic test were reiterated by the DBT test, as well. The rate of the number of questions answered correctly in DBT test turned out to be higher than that of the diagnostic test. Students reported that DBT test was more interesting and therefore they read and

answered the questions more carefully. Some of the misconceptions and errors revealed by the DBT test were as follows: “In complex numbers, in order to turn the denominator of a rational expression into a real number, it is sufficient to multiply the denominator by its conjugate.”

Analyses on the results of the diagnostic and DBT tests yielded different results. For example, the test included an item which questioned the correctness of the proposition “in the equation ‘ $2-i+x+yi$ ’, the real component of the complex number is ‘ $2+x$ ’ and its imaginary component is ‘ $-i+yi$ ’.” 21% of the students answered this item correctly in the DBT test while 65% of them considered the imaginary component as “ $-i+yi$ ” instead of “ $-1+y$ ”. While the rate of those answering this correctly in the diagnostic test was 55% and the rate of the common error was 9%. This difference is believed to result from the wording of the question and the fact that the proposition was false.

DBT test was devised for the purposes of creating an alternative test to diagnostic tests in identifying common student errors and misconceptions in complex numbers topics. Common errors and misconceptions revealed by the diagnostic test were reiterated by the DBT test, as well. Besides, the rate of the number of questions answered correctly in the DBT test was higher than that of the diagnostic test. It is confirmed by the relevant literature that DBT method can be used to identify students’ existing misconceptions. However, there aren’t any studies in the literature which explore student misconceptions or errors through the DBT method. Accordingly, the current study serves as a pilot study which proves that misconceptions can be diagnosed by means of DBT method.

DBT test devised for the current study could simultaneously gather students’ answers and the reasons for their responses thanks to the “Reason” boxes. As a result, DBT method was transformed into a tool which reduced the effects of chance to very low levels. DBT tests can be developed and employed to reveal student misconceptions and errors not only in complex numbers but also in other topics. Furthermore, teachers can devise one of their written exams or a part of these exams in the form of DBT test; in this way, they can discover their students’ levels of learning and identify their students’ errors.