H.Ü. Eğitim Fakültesi Dergisi • Yıl : 1993 • Sayı : 9 Sayfa :47 - 59

METHODISCHE ANREGUNGEN FÜR DEN MATHEMATIKUNTERRICHT: EFFIZIENTES ÜBEN MIT SELBSTERSTELLTEN MATERIALIEN

Prof. Dr. Gerhard HOFSAESS(*)

Vorbemerkung

Der Verfasser beschäftigt sich seit vielen Jahren mit der Frage, wie das Lerverhalten von Junglehrern verbessert werden kann. Es gibt in der Mathematikdidaktik einige Grundprinzipien, die zeitlose Gültigkeit besitzen, die also unabhängig von aktuellen Modeströmungen im Mathematikunterricht realisiert werden sollten. Wenn Lehrer oder Studenten in der Schulpraxis Schwierigkeiten haben, ist meistens nicht fehlende Theorie die Ursache, sondern das Unvermögen, die Theorie in die Praxis umzusetzen.

Es hat wenig Sinn, wenn bei Lehrversuchen die auftretenden Mängel nur angeprangert werden, ohne daß konstruktive Verbesserungsvorschläge gemacht werden. Der lernende Lehrer braucht eine Orientierungshilfe. Er braucht Beispiele, an denen ihm gezeigt wird, wie man besser, eindrucksvoller unterrichten kann und er braucht einige didaktische Kernsätze, die begründen lassen, warum diese Beispiele gut sind.

Im folgenden wird vor allem der Aspekt betont, welche Planungsgesichtspunkte beim Erstellen von lernergiebigen Materialien eine Rolle spielen.

Die Fülle des im Rahmen dieses Referates beim Symposium in Ankara gezeigten Folienmaterials kann im folgenden auch nicht annähernd wiedergegeben werden. Es kann lediglich versucht werden, die Kerngedanken zum Erstellen lernergiebiger Materialien zu verdeutlichen. Gelegentlich wird auf Dokumentation in der Schulbuchreihe Kurs Mathematik 5-10, Verlag Diesterweg, verwiesen, bei welcher der Verfasser Mitherausgeber und Autor ist.

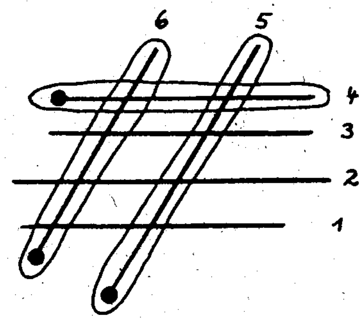
(*) Paedagogische Hochschule, Heidelberg

ZUR VARIATION

Mathematische Begriffe und Zusammenhänge stabilisieren sich durch Variation der Beispiele. Der Lehrer sollte in der Lage sein, zu erkennen, welche Gegebenheiten der Variation unterworfen werden sollten.	⇒	*Empfehlungen:* Bewegliches Material (Zeiger, Schiebestreifen, auswechselbare Auftragskärtchen) verwenden, Wesentliches variiren, Variieren bis ins Extrem, Kontrast ermöglichen.

Beispiel 1. Stunfenwinkel

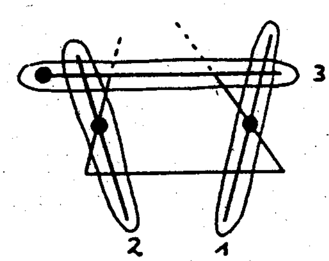
Das ergiebige Arbeitsfeld enthält mindestens drei parallele Geraden (1-3). Eine weitere Gerade (4) ist in der Richtung verstellbar; sie kann parallel oder auch nicht parallel zu den Geraden der Parallenschar sein. Die Gerade 5 mit variabler Richtung schneidet die Parallelenschar. Eine weitere Gerade (6) kann parallel zu 5 oder auch parallel zu 1-3 eingestellt werden.



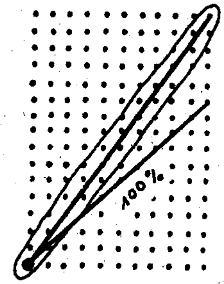
(Bewegliche Zeiger sind durch Umfahrung gekennzeichnet. Zur Verbindung der einzelnen Streifen bzw. Folienebenen dienen Nieten, Druckknöpfe, Reißnägel o.ä.)

Beispiel 2. Flächeninhalt Trapez

Mit dem Zeiger 1 allein kann das Trapez in ein flächeninhaltgleiches Parallelogramm verwandelt werden, mit den Zeigern 1 und 2 in beliebig viele andere Parallelogramme, speziell in ein Rechteck. Zeiger 3 dient der Kontrastierung: Ist 3 nicht parallel zur Grundseite, so gelingt der Flächenausgleich mit 1 bzw. 2 nicht.



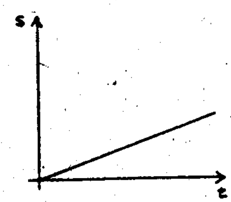
Beispiel 3. Prozentuale Steigung



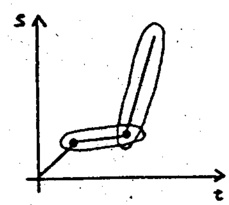
Der Begriff prozentuale Steigung ist ein Musterbeispiel dafür, wie man ohne Variation ins Extrem fast gar nichts lernt. Das Wissen kommt auf den Prüfstand, wenn man sich eine Steigung von 100 % vorstellen kann.

Wenn diese Hürde genommen ist (100 % $\hat{=}$ 450), kann man mit dem beweglichen Zeiger Steigungen von 1000 %, 10000 %, 100000 % realisieren.

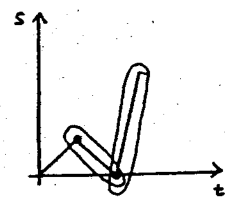
Beispiel 4. Weg-Zeit-Diagramme



Es ist zwar sachlich richtig, aber methodisch viel zu dürftig, wenn man sich bei der Behandlung der linearen Funktion auf das Schaubild mit der Ursprungsgeraden konzentriert.



Große Lernerfolge lassen sich mit dem Modell des mehrfach abknickenden Zeigers erzielen. Das Modell muß zu einer vom Lehrer erzählten Geschichte passend eingestellt werden, oder es soll der Schüler zu einer vorgegebenen Einstellung eine Geschichte erzählen.



Beliebt sind "Fahrradgeschichten", etwa hier zum zweiten Bild passend:

(1) Stück weit Richtung Freibad gefahren

(2) wieder zurückgefahren, weil Badezeug vergessen

(3) dann zum Freibad gefahren, doppelt so schnell wie vorher.

Weitere Beispiele.

Im Referat wurden weitere Beispiele vorgestellt. Sie können hier aus Platzgründen nicht aufgenommen werden: Bewegliche Materialien zu den Themen Bruchrechnen, lineare Gleichung, Strahlensätze, Sinusfunktion, sowie Arbeitsblätter zum Thema Kreisumfang, die unter dem Gesictspunkt lernergiebiger Variation entworfen wurden.

ZUR AUSFÜHRUNG VON TÄTIGKEITEN

Es geht nicht so sehr um das Nachgestalten textlich gegebener Situationen, sondern um Handlungen, die den Lernprozeß begleiten.	⇒	*Empfehlungen:* Begriffe in Handlungen umsetzen, Rollen vergeben für das Signalisieren von Besonderheiten, für das Bewußtmachen von Lösungsmethoden, für das Bearbeiten von Modellen.

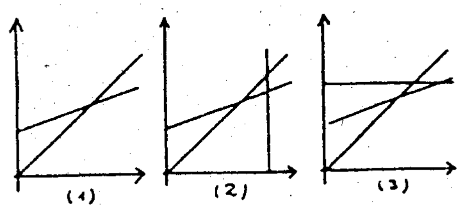
Beispiel 5 Weg-Zeit-Diagramme

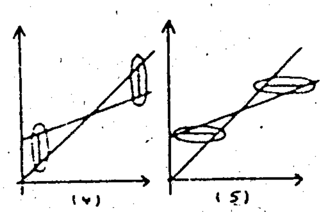
Ausgangspunkt kann eine "Fahrradgeschichte" sein. Zwei Bewegungsvorgänge liegen vor (1).

Wichtige Handlungen, die den Lernprozeß begleiten, sind

- Abrufen des Rennens zu einem festen Zeitpunkt (2) bzw. an einer bestimmten Stelle (3): eine Gerade markieren (einen Stab o.ä. hinlegen)

- Feststellen, wann zwischen beiden Akteuren eine vorgeschriebene Distanz lag (4) bzw. wo die beiden um ein bestimmtes Zeitintervall versetzt durchgefahren sind (5): Strecke einpassen (einen Überleger auf der Folie vershieben).

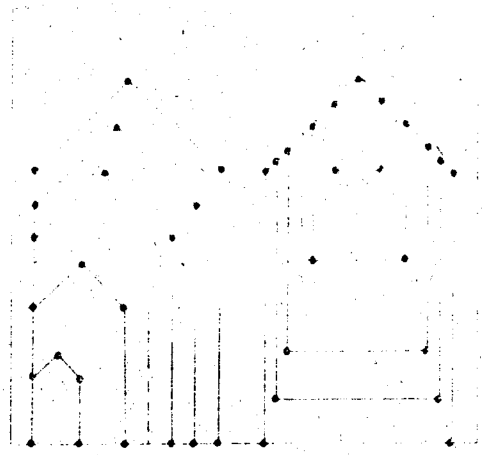




Beispiel 6. Ähnlichkeit

Eine begriffsspezifische Handlung ist das geordnete Hinlegen von Vergrößerungen/Verkleinerungen desselben Objekts, wobei eingeschmuggeltes Kontrastmaterial, das nicht in die Serie paßt, deutlich auffällt.

Beim Umordnen (Wahl eines anderen Streckzentrums) müssen sich wieder Gesetzmäßigkeiten bzw. Störungen erkennen lassen.



Große Chancen, den Lernprozeß günstig zu beeinflussen, liefert der methodische Trick, einzelnen Schülern Rollen zuzuweisen:

Beispiel 7. Konstruktive Fähigkeiten

Eine gründliche Reflexion über Lösungsmethoden läßt sich erreichen, wenn einzelne Schüler für die Ausführung spezifischer Konstruktionsschritte zuständig sind. Etwa bei der Konstruktion des vierten Parallelogrammpunktes:

A kann Geraden zeichnen,

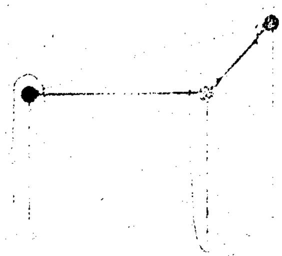
B kann Parallelen ziehen,

C kann jeden Winkel in gleicher Größe übertragen,

D kann Streckenlängen übertragen,

E kann zu jeder Strecke den Mittelpunkt markieren,

F kann Kreise schlagen.



Wer schafft es allein, wer mit welchem Partner zusammen?

Weitere Beispiele.

Eine weitere Gattung lernergiebiger Übungsaufgaben besteht im Durchlaufen von Serien. An geeignet zusammengestellten Materialien signalisiert der Schüler (optisch, akustisch, ...) das Erreichen der Lösung, das Über- oder Unterschreiten von Grenzen, das

Auftauchen angekündigter Fehlerstellen usw. Hierzu gibt es unterrichtsorganisatorisch sehr reizvolle Ausgestaltungen, siehe beispielsweise die Typen "Lichtspieltheater", "Schlaglöcher" in Kurs Mathematik 6.

ZUR ENTWICKLUNG DES LÖSUNGSWEGES

Grundsätzlich ist der Schüler ernst zu nehmen in der Phase des "Noch-nicht-Wissens". Das Entwickeln eines Lösungsweges ist etwas anderes als eine nachträgliche Besprechung einer Lösung. Die Ausbildung von Lösungsstrategien muß nachhaltig gefördert werden.

⇒

Empfehlungen:

Planungsgedanken sichtbar machen und konservieren,
Argumente protokollieren,
Strategien in gezielten Aufträgen verarbeiten, Mehrfachexemplare in Arbeitsblättern vorsehen, wenn verschiedene Strategien zur Anwendung kommen können.

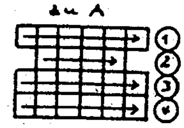
Beispiel 8. Flächeninhalt Rechteck

Wenn der Lehrer wirklich sichern will, daß das Erkennen von Streifen gleicher Länge der Schlüssel zum Gewinnen des Flächeninhalts ist, merkt er, daß man das Wesentliche an Gedankenführung besser an gestörten Rechtecken als am Rechteck selbst zeigen kann.

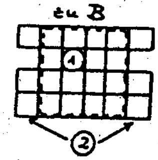
Was denkt jemand, der über folgende Zwischenergebnisse zur Lösung 22 kommt?

A	6, 10, 16, 22	zeilenweise
B	16, 22	ausschöpfen von innen
C	24, 22	annähern von außen
D	18, 22	zuerst drei gleichlange Streifen
E	...	spaltenweise
F	...	Symmetrie verwenden

zu A



zu B



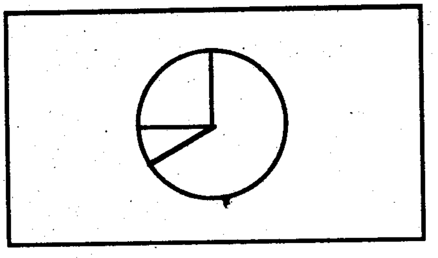
Wichtig ist hierbei nicht, daß der Schüler die Ergebniszahl 22 angibt, sondern daß er unterschiedliche Strategien nennt und diese in irgendeiner Form als Lösungsgedanken protokolliert.

Beispiel 9. Bruchrechnen - Rückschau auf die vier Grundrechenarten

Heuristische Qualifikationen werden kaum ausgebildet und gefördert, wenn beim Üben ständig nur genormte Grundaufgaben wiederholt werden. Man kann zwar nicht garantieren, daß der Schüler über heuristische Qualifikationen verfügt, aber man kann dies durch gute Unterrichtsgestaltung sehr wahrscheinlich machen.

Wenn der Schüler ein breites Spektrum an Argumenten kennt, kann man hoffen, daß er sich in der Problemsituation flexibel verhält. Den Schlüssel hierzu bilden Übungsaufgaben mit dem Argumentieren als Ziel.

Dies sei verdeutlicht durch vielfältige Übungen an einer weitgehend willkürlich gewählten Grundfigur, die sehr gründlich bearbeitet wird:



Warum ist $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} < 1$? Weil $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ (Dividieren gedeutet als Meßprozeß)

Warum ist $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$? Weil für die größere Zahl $\frac{3}{4}$ bekanntermaßen gilt $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Setze entsprechend das richtige Zeichen $\substack{<\\=\\>}$ und begründe

$\frac{2}{3} : 3 \square \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \square \frac{5}{4}$, $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \square 1$, $1 - \frac{1}{3} \square \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \square \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} \square \frac{1}{2}$

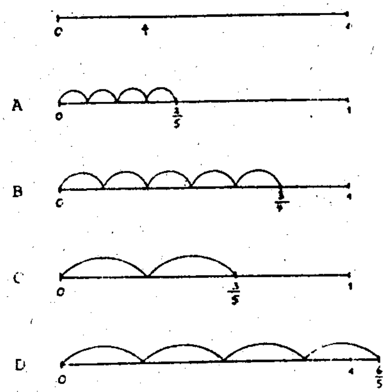
Beispiel 10. Umgang mit Rechenausdrücken

Das folgende Phänmen ist häufig anzutreffen: Der Schüler stellt unter Anwendung von Regeln Rechenausdrücke auf, kann sich aber unter diesen Rechenausdrücken nichts vorstellen. Der ganze Aufwand, der vom Lehrer bei der Herleitung betrieben wurde, ist in Frage zu stellen. Nur wenige Lehrer ziehen hieraus Konsequenzen und kommen in den Übungsphasen auf wichtige Gedanken der Herleitung zurück.

Hervorragende Möglichkeiten bietet das Interpretieren von Rechenausdrücken.

Am Beispiel des Rechenausdrucks $\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4}$, zu dem im Referat eine Grundfolie mit mehreren Überlegern vorgeführt wurde, sei dies verdeutlicht:

Das Rechenergebnis ist durch einen Pfeil gekennzeichnet. Einige Deutungen:



A von $\frac{2}{5}$ ausgehen, dann davon drei Viertel,

B von $\frac{3}{4}$ ausgehen, dann davon zwei Fünftel,

C von $\frac{3}{5}$ ausgehen, dann davon die Hälfte.

Wo liegt $\frac{3}{5}$?

Etwas links von $\frac{3}{4}$.

D von $\frac{6}{5}$ ausgehen,
dann davon ein Viertel.

Weitere Beispiele.

Das Vermitteln von Stategien ist eine Hauptaufgabe des Lehrers. Wenn ganze Bereiche der Mathematik bei Schülern unbeliebt sind, hängt es oft daran, daß der Lehrer gar keine Vermittlungshilfen kennt. Besonders kraß zeigt sich dies in der Raumgeometrie beim räumlichen Vorstellungsvermögen. Im Referat wurde ein Beispiel zu Würfeldrehungen vorgeführt.

ZUR ARBEITSFORM

Von der Sache her eignen sich manche Themen spezifisch für Zweier-, spezifisch für Dreier-, spezifisch für Vierergruppen. Die Kommunikation in der Lerngruppe schafft günstige Voraussetzungen dafür, daß der einzelne Schüler den Lernstoff schließlich beherrscht.

Transferleistungen lassen sich oft durch günstige Wahl der Arbeitsform herbeiführen bzw. kontrollieren.

⇒

Empfehlungen:

In Abhängigkeit von der mathematischen Struktur über die Sozialform entscheiden. Es bieten sich typische Organisationsformen (Partneranlage, Circle-Training, Mannschaftswettbewerb, ...) an.

Beispiel 11. Affine Abbildung

Abbildungen eignen sich besonders für Partnerarbeit. Erst durch das Zusammenwirken beider Partner ergibt sich ein Sinn. Beispiel: A hat als Arbeitsfeld ein Quadrat, B eine Raute.

A : Ich suche Seitenmitten auf.

B : Ich auch.

A : Ich verbinde diese Punkte.

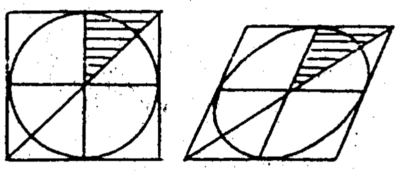
B : Ich auch.

A : Ich schraffiere das Dreieck oben rechts.

B : Ich auch.

A : Ich zeichne einen Kreis, der meine Figur von innen berührt.

B : Ich?

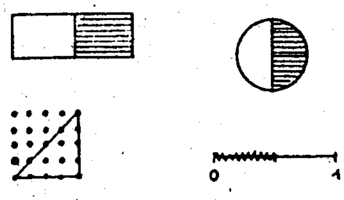


Diese Idee läßt sich auch bei anderen Abbildungen realisieren. Recht pfiffig zu organisieren sind Übungen zur Achsensymmetrie: Rauswerfspiele auf Felderplänen, gespielt nach der Regel "rausgeworfen wird bei achsensymmetrischer Lage" (siehe Kurs Mathematik 5, Seite 111).

Beispiel 12. Bruchzahlen

Viel zu wenig genützt wird die Idee, im Sinne eines Circletrainings wichtigste Modelle zunächst nacheinander zu behandeln und schließlich ihre simultane Beherrschung zu verlangen.

Als Arbeitsfelder bieten sich im Bruchrechnen an: Kreis, Rechteck vorgegebener Größe, Gitterpunktfeld zur Festlegung von Rechtecken wechselnder Größe, Zahlenstrahl.



Jeder Lernende ist froh, wenn der Unterricht durch Spiel und Spaß aufgelockert wird. Es geht bei guter Motivation aber nicht darum, Erholungspausen in den allgemeinen Unterrichtsgang einzustreuen, sondern anspruchsvolles Lernen spielerisch zu ermöglichen.

Empfehlungen:

Das Arbeiten mit reiner Mathematik-Literatur macht den Lehrer oft situationsblind. Est gibt viele motivierende Anregungen in Jugendzeitschriften. Erstaunlich viele dieser Ideen lassen sich auf Mathematikunterricht übertragen und zu hochergiebigen, den Trivialbereich weit übersteigenden Augabenstellungen heranziehen.

Beispiel 13. Viereckstypen

Das allseits bekannte und beliebte Spiel "Schiffe versenken" spielen wir mit noch ein bißchen mehr Pfiff, vgl. Kurs Mathematik 8, Seite 148.

Jeder der beiden Partner trägt in sein Feld vier Flöße ein:

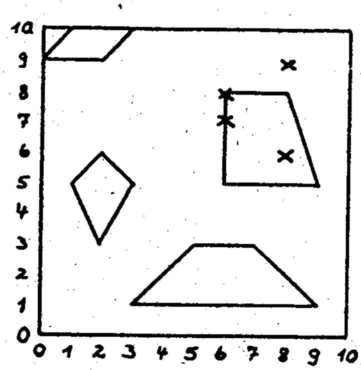
P ... ein Parallelogramm

D ... einen Drachen

T ... ein Trapez

AT ... ein achsensymmetrisches Trapez

Die Größe der Figuren darf beliebig gewählt werden. Die Ecken müssen Gitterpunkte sein. Kein Floß darf ein anderes berühren. Nun wird im Wechsel gefragt und geantwortet.



Beispiele:

8/9 ? Wasser 6/7 ? Trapez Rand

8/6 ? Trapez innen 6/8 ? Trapez Ecke - Treffer

Wer eine Ecke getroffen hat, darf gleich weiterfragen. Ein Floß ist versenkt, wenn alle vier Ekken getroffen sind. Sieger ist, wer zuerst alle Flöße des Spielpartners versenkt hat.

Das Spiel bietet ideale Möglichkeiten, Kenntnisse über das Haus der Vierecke zu testen. Es gewinnt seinen Reiz dadurch, daß dem Gegner die Größe der gewählten Figuren nicht bekannt ist. Man wird sich zunächst (oder mit schwachen Schülern ausschließlich) an Figuren orientieren, wie sie im Beispiel gezeichnet vorliegen: Als Trapez, Drachen, Parallelogramm sind dort Vierecke gezeichnet, die nicht noch speziellere Eigenschaften aufweisen. Von der Logik her ist dies jedoch keinesfalls notwendig. Wenn ein Parallelogramm verlangt ist, darf man auch ein Rechteck, eine Raute oder ein Quadrat aufzeichnen. Wenn ein Drachen verlangt ist, darf man auch eine Raute oder ein Quadrat wählen, usw. An der Selbstverständlichkeit, mit der Lehrer und Schüler mit solchen Spezialisierungen umgehen, zeigt es sich, ob die im Unterricht behandelten Sätze wie "Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm" verstanden sind, oder ob sie nur gedankenlos hergesagt werden.

Weitere Beispiele:

In aller Kürze seien einige weitere, im Referat vorgestellte Ideen zur Motivation genannt:

— Wurfbude zur Ausprägung eines Zahlengefühls

— Slalomaufgaben für integrierendes Üben, z.B. im Bruchrechnen

— die in Spielform gekleidete Simulierung einer Hochrechnung zum Üben des Dreisatzes

— Suchbilder zum gründlichen Erforschen von Achsensymmetrie und Punktsymmetrie.

ZUM LANGFRISTIGEN ÜBEN

Das langfristig angesetzte Üben sollte sich konsequent denjenigen Bereichen zuwenden, die derzeit als Defizitbereiche bekannt sind. Es sollte überdies eine Steigerung der individuellen Leistung möglich machen.	$\Rightarrow$	*Empfehlungen:* Es ist zu empfehlen, die in der Schulbuchreihe "Kurs Mathematik", Verlag Diesterweg, enthaltenen Übungen zu studieren: Die Aufgaben in den Abschnitten "Konditionstraining und Lockerungsgymnastik" der Bände 5-8 sind wegen erkannter Defizite vorgeschlagen. Viele Aufgabentypen werden über Jahre weg stabil gehalten. Einen echten Beitrag zur Differenzierungsproblematik liefern in den Bänden 9 und 10 die Abschnitte "Slalom: Trainingsaufgaben in drei Schwierigkeitsstufen".

Ein lohnendes Feld der Forschung ist es, herauszufinden, welche erwünschten Kenntnisse bei einem Großteil der Schülerschaft nicht sicher vorhanden sind und welche Lösungsprozesse nur unbefriedigend oder gar nicht in Gang kommen. Mit Verweis auf die Leistungen in Abschlußprüfungen ist hier wenig zu erreichen, denn die Schülerleistungen zu genormten Aufgabentypen mit auswendiggelernten Lösungsmechanismen täuschen viel mehr Verständnis vor als der Realität entspricht.

In der Fachgruppe Mathematik des Instituts für Weiterbildung der Pädagogischen Hochschule Heidelberg haben über viele Jahre hinweg Lehrer und Dozenten zusammengearbeitet und Schüler beim Lösen von Aufgaben beobachtet. Die zum Teil alarmierend schlechten Ergebnisse wurden nicht einfach nur zur Kenntnis genommen. Es wurden vielmehr bei der Schulbucherstellung Konsequenzen gezogen: Ein über mehrere Jahre laufendes Trainingsprogramm, das schon zu Beginn der Klasse 5 einsetzt, soll verhindern, daß der Schulabgänger auch künftig diese beobachteten Defizite hat. Um die Motivation zu steigern, wurden häufig Piktogramme zum Erkennen der Aufgabentypen verwendet. Viele dieser Aufgaben wurden in ein an sportliches Training erinnerndes Programm verpackt.

— Verstärkt Interpolation üben	⟶	Grätschsprünge
— Ein Gefühl für funktionale Abhängigkeit entwicklen	⟶	Verfolgungrennen
— Sehr große und sehr kleine Zahlen beherrschen und Übergänge zwischen ihnen schaffen	⟶	Trimm Dich
— Ein Gefühl für Zahlen und Zahlzusammenhänge entwicklen	⟶	Abseits, Schlaglöcher, Wurfbude
— Maßeinheiten beherrschen	⟶	Aufsetzer, Größensalat
— Die Wirkung der Grundrechenarten erfassen	⟶	Wurfbude
— Die Grundaufgaben in integrierten Aufgaben vermischen und dabei viel Überschlagsrechnungen durchführen	⟶	Slalom, Streichkonzert, ein Blick auf die Tabelle

Wenig echte Hilfen findet bislang der Lehrer vor, der seinen Unterricht auf unterschiedliche Niveaus ausrichten will. Es soll hier abshließend das Problem des Zurechtkommens mit vershiedenen Schwierigkeitsstufen angesprochen werden.

Der Schlüssel zum Erfolg ist die Zuwendung zum affektiven Bereich. Gutes Material erfüllt zwei Forderungen:

— Der Schüler muß die Chance erhalten, in seiner Stärke bestätigt zu werden. Das sichere Zurechtfinden, der Erfolg, auf einem unteren Niveau ist die Basis für das Aufsteigen in ein höheres Niveau.

— Durch die Materialgestaltung soll ein Sog auf den Schüler ausgeübt werden. Er soll den Wunsch verspüren, in ein höheres Niveau aufzusteigen.

Der Beitrag des Verfassers zu diesem Problem ist dokumentiert in Kurs Mathematik 9 und 10: Die Gesamtanlage als Slalom in drei parallel geführten unterschiedlichen Niveaus bietet ideale Möglichkeiten.

Thema	Blaue Piste (leicht)	Rote Piste (mittel)	Schwarze Piste (schwierig)
↓	↓	↓	↓

In ca. 50 Toren ist der gesamte Stoff der Klassen 5-9 bzw. der Klasse 10 eingefangen. Das Ziel jedes Schülers muß es sein, die leichte Piste von oben nach unten zu durchfahren. Der Anreiz ist gegeben, ein gesetztes Grundniveau durchgehend zu erfüllen. Die Hoffnung besteht, daß viele Schüler größeren Ehrgeiz entwicklen und jedes Tor von links nach rechts durchfahren oder sich direkt in die rote oder gar schwarze Piste stürzen.

Schlußbemerkung

Dieses Referat sollte dazu anregen, vertiefende Gespräche zu führen über

— das Lehren von Mathematikdidaktik in der Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung

— das Erstellen von Lehrmaterialien für Schule und Hochschule

— das Gestalten von Forschungsvorhaben im Bereich Mathematikdidaktik.