MODÜLER GRUP

Yard. Doç. Dr. Hasan Basri ÖZDEMİR(*)

Bildiğimiz klasik düzlem $\mathbb{R}^2$ ile karmaşık düzlem dediğimiz $\mathbb{C}$ nin cebirsel ve topolojik olarak hemen hemen aynı oluşu matematikteki ve matematik öğretimindeki klasik iki değişkenli reel değerli ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) veya düzlemden düzleme ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) dönüşümler yerine son yıllarda karmaşık fonksiyonların ($\mathbb{C} \to \mathbb{C}$) kullanımını gündeme getirmiş, böylece düzlemdeki hatta uzaydaki klasik analitik geometriye yeni bir sadelik kazandırmıştır.

Hacettepe Üniversitesi organizasyonu ile gerçekleştirilen bu **Fen Bilimleri Eğitimi Simpozyumunda** matematiğin ve matematik öğretiminin düzlemdeki otomorfizmaları olan Mobius Dönüşümlerinin bir alt grubu olan MODULER Grup ile ilgili bir çalışmamı sunmak istiyorum.

1. Tanım Genişletilmiş karmaşık düzlem

$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olmak üzere,

$$g(\infty) = \frac{a}{c}\ ;\ g\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty\ ;\ a, b, c, d \in C,$$

$$ad - bc \neq 0$$

olacak şekilde

$$g : C_\infty \to C_\infty \quad g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

şeklindeki dönüşümlere Möbius Dönüşümleri denir.

Bu dönüşümler kümesi bileşke işlemi ile bir gruptur ve bu grup genişletilmiş düzlemin, dolayısı ile genişletilmiş karmaşık düzlemin otomorfizmaları grubudur.

$[\mathrm{Aut}\,(C_\infty)]$.

(*) Necatibey Eğitim Fakültesi Öğretim Üyesi.

Bu grup ile singüler olmayan 2x2 matrislerinin GL (2, $\mathbb{C}$) grubu arasında sıkı ilişki vardır.

2. Tanım $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$,

$g \in \mathrm{Aut}(C\infty)$, $\left[g(z) = \dfrac{az + b}{cz + d} \right]$

olmak üzere,

$f : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Aut}(C\infty)$,

$f(A) = g$

dönüşümünü tanımlıyalım.

Bu şekilde tanımladığımız f, bir grup homomorfizmasıdır. Diğer yandan,

3. Tanım A, B ∈ GL (2, C),

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$B^* = (\overline{B})^+ = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ \overline{\gamma} & \overline{\delta} \end{pmatrix}^+$

olmak üzere

$[AB] = \mathrm{İz}\,(AB^*) = a\overline{\alpha} + b\overline{\beta} + c\overline{\gamma} + d\overline{\delta}$ değerine A ile B nin skaler çarpımı denir.

Bu bir karmaşık iç çarpımdır. Her içi çarpım bir norm belirlediğinden bu iç çarpımdan elde edilen norm,

4. Tanım A ∈ GL (2, $\mathbb{C}$),

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olmak üzere

A matrisinin normu,

$\|A\| = [A, A]^{1/2} = \left(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2\right)^{1/2}$

olur.

Bu düşünce ile $g \in \mathrm{Aut}(C_\infty)$ öğesi içinde şu tanımı verebiliriz.

5. Tanım $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$, g nin normu diye,

$$\|g\|^2 = \frac{\|A\|^2}{\det A}$$

ile tanımlanan $\|g\|$ değerine denir.

det A = 1 olma durumunda yani $A \in PSL(2, \mathbb{C})$ iken

$\|g\| = \|A\|$

olur. Böylece Aut (C_∞) üzerine, bununla aynı anlama gelen PSL (2, $\mathbb{C}$) grubu üzerine bir norm, dolayısı ile de, bir metrik konmuş oldu.

İşte bu norm ve matrik ile Aut (C_∞) yani PSL (2, $\mathbb{C}$) bir topolojik grup olur.

Her topolojik grup bir homojen uzay olduğu için PSL (2, $\mathbb{C}$) aynı zamanda bir homojen uzaydır.

$$PSL(2, \mathbb{R}) = \{ g \mid g(z) = \frac{az+b}{cz+d} ; a, b, c, d \in \mathbb{R}; ad - bc = 1 \}$$

dönüşümler kümesi PSL (2, $\mathbb{C}$) nin bir alt grubudur.

6. Tanım

$$M = \{ T \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d} ;$$

a, b, c, d $\in$ Z} kümesi PSL (2, $\mathbb{R}$) grubunun bir alt grubudur. Bu gruba Moduler Grup denir. PSL (2, $\mathbb{C}$) üzerindeki topoloji ile PSL (2, $\mathbb{R}$) ve M üzerine topoloji kondurarak M grubu da bir topolojik grup olur. Modüler grup bir ayrık gruptur. Aynı zamanda Ruchsian gruptur.

Matematik öğretiminde bir fonksiyon, bir dönüşüm söz konusu olduğu zaman ilk akla gelen, bu dönüşümün tanım ve değer kümelerinin ne olduğu, sonra da hemen ardından bu dönüşümün sabit bıraktığı noktaların ne olduğudur. İşte bu nedenle PSL (2, $\mathbb{C}$), PSL (2, $\mathbb{R}$) ve M'nin sabit bıraktığı noktaların üzerinde çalışılmış ve bu dönüşümler sabit noktalarının sayısı ve şekline göre eliptik, hiperbolik; parabolik olarak sınıflandırılmışlardır. PSL (2, $\mathbb{R}$)nin birim öğe dışındaki bir öğesinin en fazla iki sabit noktası vardır.

7. Tanım g_1, g_2 bir dönüşüm grubunun iki öğesi olsun. (PSL (2, $\mathbb{C}$), PSL (2, $\mathbb{R}$) veya M nin iki öğesi)

$g_1 = g\, g_2\, g^{-1}$ olacak şekilde yine bu grubun bir g öğesi varsa g_1 ile g_2 ya birbirinin eşleniğidirler (Conjugate) denir. g dönüşümüne de eşliyen öğe denir.

Eşlenik öğeler aynı tiptendirler. Bunun ispatı İz (gh) = İz (hg) oluşundan yararlanarak kolayca gösterilebilir.

8. Önerme Modüler grubun

$$g_1(z) = z - 1,\ g_2(z) = z + 1$$

şeklinde tanımlanan $g_1, g_2 \in M$ öğeleri bu grupta eşlenik değillerdir. Bu g_1, g_2 öğeleri PSL (2, IR) üst grubunda da eşlenik değildirler. Yani bunları eşliyen g öğesi M ve PSL (2, R) de değildir. $g \in PSL(2, \mathbb{C})$ olur.

Kanıt:

$$g_1 = g\, g_2\, g^{-1} \quad \text{ve} \quad g(z) = \frac{az + b}{cz + d},\ ad - bc = 1$$

olsun.

$$g^{-1}_{(z)} = \frac{-dz + b}{cz - a},\ g_2 g^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz + a} + 1$$

$$g_2 g^{-1}(z) = \frac{(c - d)\, z + (b - a)}{cz - a},$$

$$g\, g_2\, g^{-1}(z) = \frac{a\dfrac{(c - d)\, z + (b - a)}{cz - a} + b}{c\dfrac{(c - d)\, z + (b - a)}{cz - a} + d} = \frac{(-ad + ac + bc)\, z + ab - a^2 - ab}{(-cd + c^2 + dc)\, z + bc - ac - ad}$$

$$= \frac{(ac - 1)\, z - a^2}{c^2 z - ac - 1}$$

bulunur.

$$g\, g_2\, g^{-1}(z) = g_1(z)$$

yazılarak,

$$\frac{ac - 1}{-ac - 1} = 1\ ;\ c = 0,\ \frac{a^2}{ac + 1} = -1,\ a^2 = -1,\ a = \pm i$$

elde edilir. Görülüyor ki $g \notin PSL(2, \mathbb{R})$ ve $g \notin M$.

9. Sonuç yukarıdaki önermede verilen M nin g_1, g_2 öğelerini eşliyen öğeler, PSL (2, $\mathbb{C}$)nin

$$g = -z \pm bi$$

şeklindeki eliptik öğeleridir.

Kanıt $a = \pm i$, $c = 0$ elde etmiştik. $ad - bc = 1$ koşulunu da kullanırsak $d = \pm i$ bulunur. Buradan,

$$g(z) = \frac{\pm iz + b}{\pm i}, \quad g(z) = -z \pm bi,$$

bulunur.

Şimdi de Modüler Grubun hangi öğeleri imajiner eksenin bir noktasını sabit bırakır, hangi öğeleri bırakmaz sorusuna yanıt veren bir önerme ispatlıyalım.

10. Önerme

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g \in M$$

dönüşümü, imajiner eksenin $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z_0 = ik$ noktasını salüt bıraksın.

$$\frac{aik + b}{cik + d} = ik$$

eşitliğinden,

$$ck^2 + b + (a-d)\,ik = 0,$$

$$ck^2 + b = 0, \; a = d \quad \dots (1)$$

elde edilir. $ad - bc = 1$ koşulunu da kullanarak,

$$a^2 + c^2 k^2 = 1, \; a = d \dots (2)$$

elde edilir.

1) $c \neq 0$ ise $a^2 = 1 - c^2k^2$ eşitliğinden, $0 \leq a \leq 1$ sonucuna varılır.

$a \in Z$ olduğu için bu son eşitsizlikten $a = 0$ ve böylece $c^2 k^2 = 1$ bulunur. O halde $c = -\frac{1}{k^2}$ dir. Bu nedenle $ck^2 + b = 0$ eşitliğinden $b = \pm k$ bulunur.

Bu, $b = \pm k$, $c = \pm \frac{1}{k}$ değerlerinin ikisinin de tam sayı olması için $k = 1$ veya $k = -1$ olmak zorundadır. Bu durumda ise $g(z) = -\frac{1}{z}$ dönüşümü elde edilir. Bu öğe bir eliptik öğedir ve sabit noktaları i, $-i$ noktalarıdır.

2) $c = 0$ ise (1) ve (2) den, $b = 0$, $a = d = \pm 1$ bulunur. Yani $g(z) = I(z) = z$ birim öğesi elde edilir.

3) $b = 0$, $d \neq 0$ iken orijin bir sabit noktadır.

Bu durumda, $g(z) = \dfrac{\pm z}{cz \pm 1}$

olur. Çünkü $ad - bc = 1$ olduğundan $a = d = \pm 1$ bulunur.

$$\frac{\pm z}{cz \pm 1} = z. \Rightarrow z = 0,\ z = 0 + i0 = (0, 0)$$

11. Uygulama

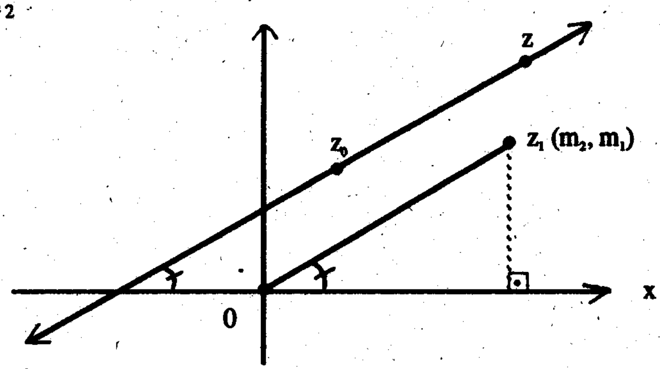
1. Kartezyen koordinatlarla verilen bir $z_0 = (x_0, y_0)$ noktasından geçen ve eğitimi m olan doğrunun denklemi (düzlemde yani $\mathbb{R}^2$ de) kartezyen koordinatlarla,

$L: y - y_0 = m(x - x_0)$

idi. Bu doğrunun C nin öğeleri yani karmaşık sayılarla ifadesi,

$L = \{ z = z_0 + tz_1 \mid -\infty < t < \infty \}$ z_1 ise

$m = \dfrac{m_1}{m_2} \in R$ olmak üzere $z_1 = (m_2, m_1)$ yani $z_1 = m_2 + im_1$ karmaşık sayısıdır.



Örnek $z_0 = (2, 3)$ noktasından geçen ve eğim $m = \dfrac{1}{3}$ olan

$L: y - 3 = \dfrac{1}{3}(x - 2)$ doğrusunun karmaşık denklemi,

$L = \{z = (2, 3) + (3, 1)t \mid -\infty < t < \infty\}$ olur.

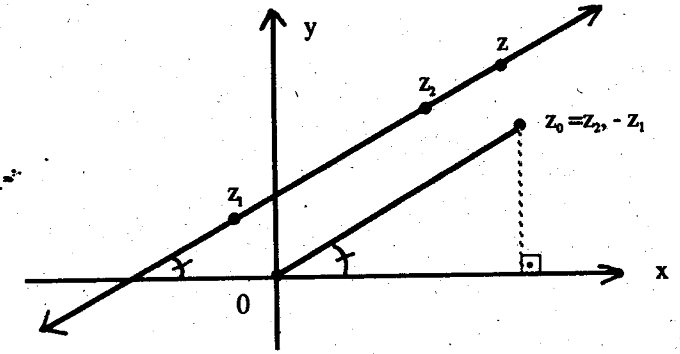
2) $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ noktasından geçen

$$L: y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

doğrusunun karmaşık denklemi kolayca

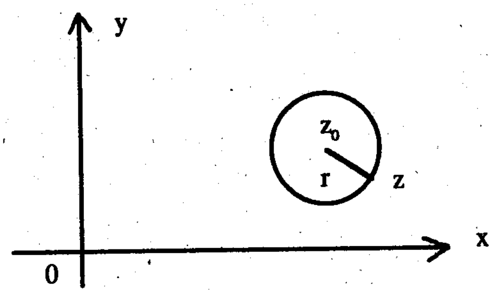
$L = \{z = z_1 + t z_0 \mid -\infty < t < \infty\}$

olur. $(z_0 = z_2 - z_1)$



3) Aynı şekilde $z_0 = (x_0, y_0)$ merkezli ve $r \in \mathbb{R}$ yarıçaplı $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ çemberinin karmaşık denklemi $|z-z_0| = r$ olur.

4) PSL $(2, \mathbb{C})$, PSL $(2, \mathbb{R})$ ve M dönüşüm gruplarının öğeleri konform dönüşümlerdir. Bu nedenle düzlemdeki bir eğrinin veya bir şeklin M nin öğeleri altındaki görüntüleri kendisine benzerdir. Bir doğrunun görüntüsü kendisine paralel bir doğrudur.

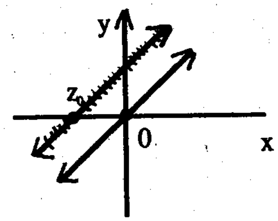


Örnek : L : y = x doğrusunun

g (z) = z - 1, $g \in$ M öğesi altındaki görüntüsü, orijinin görüntüsü zo = - 1 = (-1, 0) olduğundan L'nin görüntüsü z_0 dan geçen ve L ye parelel olan L_1 doğrusu yani

$L_1 : y = x + 1$

doğrusudur.



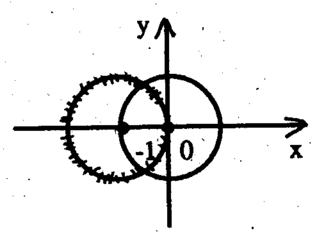
Bu dönüşüm, örneğin $|z| = 1$ merkezcil çemberini

$g(z) = z' = z - 1$

olduğundan, buradan z çekilip yerine konarak,

$|z' + 1| = 1$ yani

$|z + 1| = 1$ çemberi olur.



12. Sonuç

Düzlemdeki analitik geometri öğretimi, karmaşık sayılarla yaptığında bilinen klasik kavramlar (eğri, doğru, çember, eğitim, paralellik, merkez, iki nokta arasındaki uzaklık) daha somutlaşmakta, bu nedenle de öğrencilere, öğrenenlere, öğretmenlere kolaylık sağlamaktadır. Bu nedenle liselerimizde ve üniversitelerimizde analitik geometri dersleri kartezyen koordinatların yanında C nin öğeleri ile takviyeli verilirse anlatım ve anlamada soyut kalan bazı kavramların daha somutlaşacağı düşüncesindeyim.

13. Dilek ve Öneriler

Bu simpozyumun çok faydalı konuları gündeme getirdiğine tanık olduğum için sevinçliyim. Şu soru ve sorunlara da açıklık getirilmesi dileği ile sunmak istiyorum.

1) Öğretmenlik bir meslek midir, yoksa herhangi bir kişinin atandığında yaptığı bir iş midir? Bence öğretmen olmayana öğretmenlik yaptırılmamalıdır. Tıp doktoru olmayana doktorluk yaptırırsanız kıyamet kopar.

2) Matematik öğretmeni önce matematikçi olmalı mıdır? Şu anda fen fakültesi matematik mezunu matematikçi sayılmakta, eğitim fakültesi mezunu matematik öğretmeni matematikçi sayılmamaktadır. Bence matematik öğretmeni önce matematikçi olmalıdır.

KAYNAKLAR

1. BAŞKAN, T., Ayrık Gruplar. Hacettepe Üniversitesi, 1980.
2. BAŞKAN, T., and Macbeath, A. M., Centralizers of Reflections in Crystallographic Groups, Matl. Proc. Camb. Phil. Soc. 92 (1982) pp. 79-91.
3. BEARDON, A. F., The Geometry of Discrete Groups, Springer Verlag, New York, 1983.
4. BEST, L. A., On Discrete Subgroups of LF (2, C), Doktora Tezi, Üniversitiy of Birmingham, 1968.
5. CONWAY, J. B. Functions of one Complex Variable, Springer Verlag. New York.
6. FORD, L. R., Automorphic Functions, Chelsea, New York, 1951.
7. MEDNYKH, A. D., Automorphism Groups of Three Dimensional Hyperbolic Manifolds, Soviet Math, Dokl. Vol. 32 (1985), No. 3, 633-636.
8. MILNOR, J., Hyperbolic Geometry: The First 150 Years, Bull. Amer, Math. Soc., 6 (1982), 9-24.
9. ÖZDEMİR, H. B., Topoloji, Uludağ Üniversitesi, Necatibey Eğitim Fakültesi, 1987.
10. ZIESCHANG, H., Surfaces and Planer Discontinuous Groups, Springer-Verlag, New York, 1980.
11. ZIESCHANG, H., Finite Groups of Mapping Classes of Surfaces, Springer-Verlag, New York, 1981.