

İlköğretim Matematik Öğretmenlerinin Öğrencilerin Kurdukları Problemlere Yönelik Görüşlerinin İncelenmesi: Kesirlerle Toplama İşlemi

The Investigation of Elementary Mathematics Teachers' Views about Problems Posed by Students: Addition Operation with Fractions

Tuğrul KAR*, Cemalettin IŞIK**

ÖZ: Çalışmada, ilköğretim matematik öğretmenlerinin yedinci sınıf öğrencilerinin kesirlerle toplama işlemine yönelik kurdukları hatalı problem cümlelerine yönelik görüşlerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Çalışma, Erzurum il merkezindeki 10 ilköğretim matematik öğretmeni ile yapılmıştır. Çalışmanın verileri iki aşamada toplanmıştır. Birinci aşamada, yedinci sınıf öğrencilerine kesirlerle toplama işlemine yönelik hazırlanan Problem Kurma Testi uygulanmıştır. İkinci aşamada veriler, öğrenci yanıtlarından seçilen altı hatalı problemin yer aldığı görüşme formunun öğretmenlere uygulanması ile toplanmıştır. Çalışmada elde edilen veriler, içerik analiz türleri içerisinde yer alan kategorisel analiz tekniği kullanılarak çözümlenmiştir. Çalışmada öğretmenlerin, öğrencilerin kurdukları problemlerdeki hataları belirleyebilmede güçlükler yaşadıkları, birden çok hatayı barındıran problem cümlelerinde başarının daha düşük olduğu ve yaptıkları açıklamalarda yeni hatalar sergiledikleri tespit edilmiştir.

Anahtar sözcükler: problem kurma, kesirlerle toplama, ilköğretim matematik öğretmenleri,

ABSTRACT: This study aims at presenting the opinions of elementary mathematics teachers on the incorrect problem sentences posed by the seventh grade students, with regard to addition of fractions. The study was conducted with 10 elementary mathematics teachers located in the city center of Erzurum province. Data for the study have been collected in two stages. At the first stage, the Problem Posing Test, prepared for addition of fractions, was applied to the seventh grade students. At the second stage, data were collected by applying the interview form, which includes six incorrect problems, to the teachers. The data obtained from both stages of the study has been analyzed through categorical analysis technique, listed under the content analysis types. The results of the study show that the elementary mathematics teachers experienced difficulty in identifying the errors, showing a lower rate of success in problem sentences that include more than one error and made different errors in explaining the errors.

Keywords: problem posing, addition operation with fractions, elementary mathematics teachers,

1. GİRİŞ

Matematik eğitimi araştırmalarında problem kurma, son yıllarda giderek artan bir ilgiyle karşı karşıya kalmıştır. Problem kurmanın kavramsal anlama ve problem çözme becerilerini geliştirmesi (Cai ve Hwang, 2002; Cankoy ve Darbaz, 2010; Crespo ve Sinclair, 2008; Toluk-Uçar, 2009), bu ilginin nedenleri arasında yer almaktadır. Lin ve Leng (2008), problem kurma sürecinde öğrencilerin problem kurulması istenen matematiksel işlemleri, kavramları ve kurulan problemin farklı çözüm yollarını düşünmeleri nedeniyle, öğrencilerin farklı ve esnek düşünebilme becerilerinin geliştirilmesinde fırsatlar sunduğunu belirtmişlerdir. Son yıllarda problem kurmaya duyulan ilgi, ulusal ve uluslararası dokümanlarda da kendini göstermektedir. Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] 2000), öğrencilerin kendi problemlerini kurmalarına imkan tanıyacak öğrenme ortamlarının oluşturulmasını desteklemektedir. İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı'nda (MEB 2009) da problem kurma kazanımları, problem çözme ile ilişkilendirilerek sunulmuştur.

* Dr., Atatürk Üniversitesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı, tugrulkar@atauni.edu.tr

** Doç. Dr., Erciyes Üniversitesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı, isik_cemalettin@hotmail.com.tr

Literatürde problem kurma etkinliklerinin sınıflandırılmasına yönelik farklı çerçeveler sunulmakla birlikte, Stoyanova'nın (1998) *serbest*, *yarı-yapılandırılmış* ve *yapılandırılmış* problem kurma şeklindeki sınıflandırması en yaygın olarak kullanılanıdır. Serbest problem kurmada öğrencilere problem verilmez. Öğrencilerden, sınırlandırma olmaksızın verilen doğal duruma uygun problemler kurmaları istenir (Örn., para problemi kurunuz gibi). Yarı-yapılandırılmış problem kurmada öğrencilere açık-uçlu bir durum verilir. Öğrencilerden bilgi, beceri ve deneyimlerini kullanarak açık-uçlu durumu problem olacak şekilde tamamlamaları istenir. Bir resim, denklem veya açık-uçlu sözel hikayelere yönelik problem kurma etkinlikleri bu kategoride yer almaktadır (Örn., $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = ?$ işlemiyle çözülebilecek bir problem kurunuz gibi). Yapılandırılmış problem kurmada ise öğretmenler, özel problem çözme stratejileri geliştirir ve öğrencilerinden, bu stratejileri çözümünde kullanmayı gerektirecek problemler kurmalarını isterler.

Problem kurma; matematiksel kavram ve işlemlerle günlük yaşam arasındaki ilişkinin kurulmasına (Dickerson, 1999), temsiller arasındaki geçişlere (English, 1998; Işık, 2011) katkıda bulunmaktadır. Dolayısıyla problem kurma, sembolik kesir işlemleri ile günlük yaşam arasındaki ilişkinin kurulmasında önemli bir yaklaşım olarak düşünülebilir. Işık ve Kar (2012a), kesirler alt öğrenme alanında problem kurma etkinliklerine yer veren öğretmenlerin tamamının, problem kurmanın öğrencilerin kavramsal anlamalarına ve sembolik ifadelerle günlük yaşam arasındaki ilişkinin kurulmasına katkı sağladığı yönünde görüşler belirttiklerini tespit etmişlerdir. İlköğretim 6-8. Sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (MEB 2009), *kesirlerle işlemler yapmayı gerektiren problemleri çözer ve kurar* kazanımı altında öğrencilerden, problemlerin çözümünde kullanılan işlemleri gerektiren benzer problemler yazmaları istenmektedir.

Literatürde, öğrenciler ve öğretmen adaylarının kesirlerle toplama işlemine yönelik problem kurmada önemli güçlükler yaşadıkları ve kavramsal yönden birçok hata sergiledikleri belirtilmektedir (Işık ve Kar, 2012b; Işık, Öcal ve Kar, 2013; Kılıç 2013a, 2013b; McAllister ve Beaver, 2012; Osana ve Royea, 2011; Toluk-Uçar, 2009). Işık ve Kar (2012b), ilköğretim yedinci sınıf öğrencilerinin kesirlerle toplama işlemine yönelik kurdukları problemlerde yedi hata türü tespit etmişler ve bu hata türleri içerisinde parça-bütün ilişkisini kuramama, kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme ve birim hatalarının daha fazla ön plana çıktığını belirlemişlerdir. Kılıç (2013b) sınıf öğretmeni adaylarının serbest, yarı-yapılandırılmış ve yapılandırılmış problem kurma etkinliklerinde, kurdukları problemlerin problem durumu olmama, problem kurma durumunun yapısına bağlı sorunlar yaşama, problem kurma sırasında eksik veri kullanma ve problem kurma durumunu eksik bulma şeklinde sorunlar yaşadıklarını tespit etmiştir. Toluk-Uçar (2009), sınıf öğretmeni adaylarının kesirlerle toplama yerine doğal sayılarla toplama işlemine yönelik problemler kurduklarını ve kesirleri miktar yerine parça sayısı şeklinde düşündüklerini ifade etmiştir. Işık ve diğerleri (2013), sınıf öğretmeni adaylarının beşinci sınıf öğrencilerinin kesirlerle toplama işlemine yönelik kurdukları problemlerdeki kesir sayılarını uygun birimlerle ifade edememe, kesir sayılarının belirttiği miktarın referans alınan bütün ile ilişkilendirilememesi ve parça-bütün ilişkisini kuramama hatalarını belirlemede daha fazla güçlük yaşadıklarını belirlemişlerdir. Işık, Kar, Işık ve Güler (2012) ise, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının yedinci sınıf öğrencilerinin tam sayılı kesir ile basit kesrin toplamına yönelik kurdukları problemlerdeki kesir sayılarını uygun birimle ifade edememe ve parça-bütün ilişkisini kuramama hatalarını belirlemede daha fazla güçlük yaşadıklarını ve hatalara yönelik açıklamalarında farklı hatalar sergilediklerini tespit etmişlerdir.

Kılıç (2013a), sınıf öğretmeni adaylarının kesirlerle bölme ve çıkarma işlemlerine yönelik daha az problemler kurduklarını ve kesirlerin işlemci anlamını ön plana çıkardıklarını belirlemiştir. Osana ve Royea (2011), sınıf öğretmeni adaylarının problem kurulması istenen işlem yerine farklı işlemlere yönelik problemler kurduklarını, farklı sayı veya işlemleri eklediklerini, çözüme yönelik yeterli bilgiye yer veremediklerini ve yanıtları soru kökü içerecek

şekilde tamamlayamadıklarını tespit etmişlerdir. McAllister ve Beaver (2012) ise, sınıf öğretmeni adaylarının kesirlerle işlemlere yönelik kurdukları problemlerde günlük yaşam durumlarıyla ilişkili problemler yazamama, kesir sayılarını uygun birimlerle ifade edememe, mantıksal olarak problemin geçerli olmayışı ve kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme hatalarını daha fazla ön plana çıkardıklarını tespit etmişlerdir.

Literatürde, kesirlerle toplama işlemine yönelik kurulan problemlerdeki hataların analizi yanında, kesirlerle toplama işlemine yönelik öğrencilerin yaptıkları hataların öğretmen veya öğretmen adayları tarafından nasıl değerlendirildiğine yönelik çalışmalarda yer almaktadır (Chick ve Baker, 2005; Fuller, 1996; Özmantar ve Bingölbali, 2009; Toluk-Uçar, 2011; Ward ve Thomas, 2007). Örneğin Ward ve Thomas (2007), ilköğretim matematik öğretmenlerine; bir öğrencinin $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$ işlemine $\frac{5}{8}$ yanıtını verdiği ve bu yanıt için, *oyunun ilk yarısında 5 atışın üçünü gole çevirdim, ikinci yarı da ise üç atışın ikisini gole çevirdim. Toplamda sekizde beşini gole çevirdim* şeklinde açıklama yaptığını belirtilerek, öğretmenlerden yapılan işlem ve açıklamayı değerlendirmelerini istemiştir. Öğretmenlerin %66'sının öğrencinin açıklamasının yanlış olduğunu fark etmelerine rağmen, sadece %9'unun doğru çözüme yönelik kavramsal açıklama yapabildikleri tespit edilmiştir.

Kesirlerle toplama işlemine yönelik yapılan çalışmaların, öğretmen veya öğretmen adaylarının öğrenci yanıtlarını nasıl değerlendirdikleri üzerine yoğunlaştığı görülmektedir. Kesirlerle toplama işlemine yönelik problem kurma çalışmalarının ise, öğrenciler veya öğretmen adaylarının kurdukları problemlerdeki hataların analizine odaklandığı tespit edilmiştir. Buna karşın matematik öğretmenlerinin, öğrencilerin kesirlerle toplama işlemine yönelik kurdukları problemlerdeki hatalara yönelik nasıl açıklamalar yaptıklarını araştıran bir çalışma ile karşılaşılmamıştır. Öğrenci hatalarının belirlenmesi ve uygun şekilde dönütler verilmesi, matematik öğretiminde öğretmenlerin önemli görevlerinden birisidir (NCTM 2000). Gonzales (1998), problem kurma etkinliklerinin başarısının öğretmenlerin öğrencilerine doğru problemler kurma ve keşfetmede yapacağı rehberliğe bağlı olduğunu vurgulamıştır. Öğretmenlerin alan bilgisi, öğrencilerin verilen etkinliklere yönelik yaptıkları hataların tespit edilmesini ve bu hataların nedenlerine yönelik kavramsal açıklamalar yapabilmelerini de kapsamaktadır (Ball, Thames, ve Phelps 2008). Ders ortamlarında öğrenciler için problemler kurulacağı ve öğrencilerin kuracakları problemlere dönütler verileceği de dikkate alındığında, öğretmenlerin kurulan problemlerdeki hatalara yönelik değerlendirmelerinin tespit edilmesi önemlidir. Bu bağlamda, araştırmada ilköğretim matematik öğretmenlerinin ilköğretim yedinci sınıf öğrencilerinin yarı-yapılandırılmış problem kurma etkinlikleri içerisinde yer alan kesirlerle toplama işlemine yönelik kurdukları hatalı problem cümlelerine yönelik görüşlerinin ortaya konulması amaçlanmıştır.

2. YÖNTEM

Çalışmada, nitel araştırma yaklaşımları içerisinde yer alan durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Durum çalışması, sınırları belirli bir sistemin (bir etkinlik, olay, süreç ya da bireyler) derinlemesine keşfedilmesidir (McMillan ve Schumacher 2010). Öğretmenlerin, kesirlerle toplama işlemine yönelik öğrencilerin kurdukları hatalı problem cümlelerine yönelik görüşlerinin ortaya konulması amaçlandığından durum çalışması yönteminin kullanılmasına karar verilmiştir.

2.1. Katılımcılar

Araştırma, Erzurum il merkezindeki yedi ilköğretim okulunun yedinci sınıflarında öğrenim gören 210 öğrenci ve 10 ilköğretim matematik öğretmeni ile yapılmıştır. 2011-2012 güz yarıyılında, Erzurum il merkezindeki ilköğretim okulları içerisinde basit seçkisiz örnekleme

yoluyla yedi ilköğretim okulu belirlenmiştir. Belirlenen ilköğretim okulları içerisinde yansız olarak birer şube seçilmiştir. Uygulamaya katılan öğrenciler, altıncı sınıfta ilköğretim matematik programındaki, *kesirlerle toplama ve çıkarma işlemlerini yapar ve kesirlerle işlemler yapmayı gerektiren problemleri çözer ve kurar* kazanımlarına yönelik öğretim sürecini tamamlamışlardır.

Öğrencilerin kurdukları problemler arasından seçilen ve altı hatalı problemi içeren görüşme formu, Erzurum il merkezinde görev yapan 10 ilköğretim matematik öğretmenine 2011-2012 öğretim yılı bahar yarıyılında uygulanmıştır. Çalışmaya katılan öğretmenlerin belirlenmesinde, altıncı sınıf öğretim programında kesirler alt öğrenme alanındaki kazanımlara yönelik öğretim yapılmış olması ölçüt olarak alınmıştır. Çalışmaya gönüllü olarak katılmayı kabul eden öğretmenlerin her birine, öğretmen kavramını simgeleyen Ö1,...,Ö10 şeklinde kodlar atanmıştır. Öğretmenlerin hizmet süresi ve cinsiyetlerine ait dağılım Tablo 1’de verilmiştir.

Tablo 1: Öğretmenlerin Hizmet Süresi ve Cinsiyetlerine Ait Dağılım

Öğretmenler	Hizmet Süresi	Cinsiyet	Öğretmenler	Hizmet Süresi	Cinsiyet
Ö1	5	Erkek	Ö6	5	Bayan
Ö2	6	Erkek	Ö7	4	Erkek
Ö3	4	Erkek	Ö8	5	Erkek
Ö4	4	Erkek	Ö9	3	Bayan
Ö5	2	Bayan	Ö10	2	Erkek

2.2. Verilerin Toplanması ve Çözümlemesi

Araştırmanın verileri iki aşamada toplanmıştır. Birinci aşamada, yedinci sınıf öğrencilerine kesirlerle toplama işlemine yönelik hazırlanan Problem Kurma Testi (PKT) uygulanmıştır. PKT’nde iki basit kesrin toplamına yönelik, $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = ?$ ve $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = ?$ şeklindeki iki maddeye yer verilmiştir. Literatürde, kesirlerle toplamaya yönelik benzer işlemlerden yararlandığı tespit edilmiştir (Işık ve Kar 2012b; McAllister ve Beaver, 2012; Toluk-Uçar, 2009). Öğrencilerden bir ders saatinde sadece verilen işlem ile çözülebilecek, günlük yaşam durumlarıyla ilişkili problem kurmaları istenmiştir.

Literatürde, kurulan problemlerde görülen kavramsal eksiklikler *hata* şeklinde değerlendirilmiştir (Örn., Işık & Kar, 2012b; McAllister & Beaver, 2012). Bu çalışmada da literatürle ortak bir dil oluşturmak adına görülen kavramsal eksikliklerin tamamı *hata* şeklinde isimlendirilmiştir. PKT’ne verilen yanıtlar, iki farklı araştırmacı tarafından eş zamanlı ve birbirinden bağımsız olarak analiz edilmiştir. Analiz sürecinde bir araştırmacı, *işlem sonucuna doğal sayı anlamı yükleme* ve *toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme* hatalarını, *kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme* kategorisi altında değerlendirmiştir. Buna karşın analizler üzerine yapılan görüşmelerde, bu *hata türlerinin* ayrı ayrı değerlendirilmesi üzerinde fikir birliği sağlanmıştır. Çünkü bazı öğrenciler, toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yüklemeyen, sonuca doğal sayı anlamı yüklemişlerdir. Bazı öğrenciler ise sadece toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yüklerken, sorulması istenen durumda bu tür bir hataya düşmemişlerdir.

Yapılan analizler sonucunda, yedinci sınıf öğrencilerinin kurdukları problemlerde altı *hata türü* tespit edilmiştir. Bu *hata türleri* şunlardır: *Toplanan ikinci kesri bütünü kalanı üzerinden ifade etme* [H_1], *işlemi soru köküne yansıtamama* (H_2), *işlem sonucuna doğal sayı anlamı yükleme* (H_3), *birim kargaşası* (H_4), *toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme* (H_5), *parça-bütün ilişkisini kuramama* (H_6). İkinci aşamada veriler, bu *hata türlerini* içeren altı hatalı problemin yer aldığı görüşme formu öğretmenlere uygulanarak toplanmıştır. Görüşme formunda yer alan hatalı problemler ve içerdikleri *hata türleri* Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2: Görüşme formunda Yer Alan Problemler ve İçerdikleri Hata Türleri

Hatalı Problemler		
1	Öğretmenim bana $\frac{1}{2}$ tane yapışkan veriyor. Sonradan aldığım yıldızlar için de $\frac{3}{4}$ kadar yapışkan verdiğine göre toplam kaç tane yapışkanım olur?	H_3, H_4, H_5
2	Sınıftan eksikleri almak için para toplanıyor. Öğretmenimiz bu paraların $\frac{1}{2}$ sini tahta kalemi, silgi ve süpürge için kullanıyor. Geriye kalan paranın $\frac{3}{4}$ ünü sıra örtüleri için kullanıyor. Sınıftan toplanan paranın kaçta kaçını kullanılmıştır?	H_1
3	Babam çikolatanın $\frac{1}{2}$ sini bana vermiştir. $\frac{3}{4}$ ünü ise kardeşime vermiştir. Babam bölüştürmeden önce çikolata ne kadardı?	H_2, H_6
4	Paramın $\frac{1}{3}$ ü ile kola aldım. Geriye kalan paramın $\frac{1}{2}$ si ile de gofret aldım. Buna göre paramın kaçta kaçını harcadım?	H_1
5	Annem yaptığı hamurun $\frac{1}{2}$ si ile kakaolu kek yaptı. Geriye kalan $\frac{1}{3}$ ü ile de pasta yaptı. Buna göre annemin başlangıçta ne kadar hamuru vardı?	H_2, H_6
6	Kadir ile Rabia evin bahçesindeki ağaçtan elma toplamak için ağaca çıkıyor. Kadir $\frac{1}{2}$ topluyor. Rabia ise $\frac{1}{3}$ elma topluyor. Kadir ile Rabia'nın toplam elma sayısı kaçtır?	H_3, H_4, H_5

Tablo 2’de yer alan problemler, her bir işlem için altı farklı hatanın tamamını içerecek şekilde öğrenci yanıtları arasından seçilmiştir. Ayrıca bu süreçte mümkün olduğu kadar farklı hata türlerini aynı anda barındıran problemlerin seçilmesine de özen gösterilmiştir. Böylece öğretmenlerin farklı hataları içeren problem cümlelerinde, hangi hataları daha fazla belirleyebildiklerinin de ortaya konulması amaçlanmıştır. Yapılan görüşmelerde öğretmenlere, öğrencilerden kesirlerle toplamaya yönelik sadece verilen işlemler ile çözülebilecek problemler kurmalarının istendiği belirtilmiştir. Testte yer alan altı problem cümlesinin öğrencilerin kurdukları problemler olduğu vurgulanarak, öğretmenlerden verilen işlem ile problem cümlelerini karşılaştırarak değerlendirmeleri istenmiştir. Buna karşın pilot çalışma sürecinde öğretmenlerin, problem cümlelerinin basit olduğu şeklinde yanıtlar verdikleri ve hatalardan ziyade problem cümlesinin şekilsel yapısına odaklandıkları görülmüştür. Dolayısıyla araştırmacılar görüşme yönergesinde bu durumu, *problem cümleleri öğrenciler tarafından kurulmuştur. Verilen toplama işlemleri ile problem cümlelerini karşılaştırınız ve varsa problem cümlelerindeki hataları belirleyerek açıklayınız* şeklinde değiştirmişlerdir. Mülakat sürecinde her bir öğretmene, problem cümlelerinin tamamına yönelik açıklamalarını bitirdikten sonra belirtmedikleri hatalara yönelik açık-uçlu sorular yöneltilmiştir. Yöneltilen açık-uçlu sorularda, öğretmenlere belirtmedikleri hatalara yönelik açıklamalar yapılmış ve bu hataların göz ardı edilmesinin nedenleri sorulmuştur. Mülakatlar, öğretmenlerin kendilerini daha rahat ifade edebilmeleri ve görüşmelerin kesintiye uğramaması için geniş ve sessiz bir ortamda yapılmıştır. Mülakatlar yaklaşık 20-30 dakika arasında sürmüş ve öğretmenlerin izni alınarak ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmıştır. Daha sonra kayıtlar yazıya dökülerek analiz edilmiştir.

Çalışmanın her iki aşamasından elde edilen veriler *içerik analiz* türleri içerisinde yer alan *kategorisel analiz* tekniği kullanılarak çözümlenmiştir. Corbin ve Strauss’a (2007) göre, bu tür bir analiz sürecinde veriler kodlanır, bu kodlardan hareketle kategoriler oluşturulur ve bu kategoriler düzenlenir. Öğretmenlerin yaptıkları açıklamalar, problem cümlelerinde yer alan hata kategorilerine göre analiz edilmiştir. Bunun yanında öğretmenlerin açıklamalarında yaptıkları diğer hatalar da içerik analizi ile ortaya konulmuştur. Görüşme formundaki her bir problem cümlesine yönelik yapılan açıklamalar, iki araştırmacı tarafından birbirinden bağımsız olarak analiz edilmiştir. Daha sonra analizler karşılaştırılmış ve sınıflandırmalar üzerinde fikir birliği

sağlanmıştır. Bunun yanında bulguların sunumunda öğretmenlerin özgün ifadelerine sıklıkla yer verilmiştir.

3. BULGULAR

3.1. Problem Cümlelerinde Yer alan Hataların Kavramsal Analizi

Tablo 2’deki problem cümlelerinde görülen altı hata türüne ait açıklamalar şu şekildedir;

Toplanan ikinci kesri bütünün kalanı üzerinden ifade etme (H₁): Bu hata türünde öğrenciler, belirledikleri bir bütün üzerinden toplanan birinci kesir sayısını ifade etmişlerdir. Buna karşın ikinci kesir sayısını, başlangıçtaki bütünün kalan kısmı üzerinden ifade etmişlerdir. Buna karşın öğrencilerden sadece, $\frac{1}{2}$ ile $\frac{3}{4}$ ’ün toplamı ile çözülebilecek problemler kurmaları istenmiştir. Tablo 2’deki ikinci ve dördüncü problemlerde bu hata türü bulunmaktadır. Öğrencilerin problem cümlelerinde kullandıkları, *geriye kalan paranın $\frac{3}{4}$ ’ünü ve geriye kalan paramın $\frac{1}{2}$ ’si* şeklindeki ifadeleri bu hata türünü örneklemektedir.

İşlemi soru köküne yansıtamama (H₂): Bu hata türü, toplama işleminin soru kökünde ifade edilemediği durumları kapsamaktadır. Öğrenciler kesir sayılarını ifade etmelerine rağmen, soru kökünde toplama işlemini karşılayacak cümleyi oluşturamamışlardır. Bu hata türü, Tablo 2’deki üçüncü ve beşinci problemlerde bulunmaktadır. Soru köklerinde kullanılan *babam bölüştürmeden önce çikolata ne kadardı? ve buna göre annemin başlangıçta ne kadar hamuru vardı?* şeklindeki ifadeler, bu hata türünü örneklemektedir. Bu soru köklerine göre, problemin çözümünde hangi işlemin seçildiğinin önemi kalmamaktadır.

İşlem sonucuna doğal sayı anlamı yükleme (H₃): Problem kurulması istenen toplama işlemlerinin sonuçları da kesir sayısıdır. Buna karşın bu hata türünde işlem sonucu doğal sayı gibi düşünülerek soru kökleri oluşturulmuştur. Bu hata türü, Tablo 2’deki birinci ve altıncı problemlerde bulunmaktadır. İşlem sonucundaki kesir sayıları, *toplam kaç tane yapışkanım olur?* ve *toplam elma sayısı kaçtır?* ifadeleriyle karşılanarak hata yapılmıştır.

Birim kargaşası (H₄): Bu hata türü, kesir sayılarının uygun birimler ile ifade edilemediği problemleri içermekte ve Tablo 2’deki birinci ve altıncı problemlerde bulunmaktadır. Sırasıyla birinci ve altıncı problemlerde kullanılan, $\frac{3}{4}$ kadar ve $\frac{1}{2}$ topluyor şeklindeki ifadeler bu hatayı örneklemektedir. Bu ifadelerde, kesir sayılarına yüklenen birim anlamı açık değildir. Örneğin $\frac{1}{2}$ topluyor ifadesi ile ağaçtaki elmaların yarısının mı toplandığı veya başka bir durumun mu belirtilmek istendiği açık değildir.

Toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme (H₅): Bu hata türü, toplanan kesir sayılarının doğal sayılarla ifade edilebilecek çokluklar üzerinden oluşturulduğu problemleri içermektedir. Bu hata türü, Tablo 2’deki birinci ve altıncı problemlerde görülmüştür. Problemlerde $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{3}$ kesir sayıları, tane ve elma sayıları ile eşleştirilerek doğal sayı anlamı yüklenmiştir.

Parça-bütün ilişkisini kuramama (H₆): $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ işleminin sonucu bir bütünden büyüktür. Bu hata türü, bu durumun göz ardı edildiği problemleri içermektedir. Tablo 2’deki üçüncü problemde, çikolatanın $\frac{1}{2}$ ’i verildiğinde, geriye yarısı kalacaktır. Öğrenci problemin devamında $\frac{3}{4}$ ’ünü ise kardeşine verdiğini belirtmiştir. Bu durumda verilen miktar, geriye kalan miktardan daha fazla olup, parça-bütün ilişkisi açısından anlamlı değildir. Ayrıca bu hata türü, toplanan birinci kesir sayısının belirlenen bir bütün üzerinden ifade edildiği, buna karşın ikinci kesir sayısının ise bütünün kalan kısmı şeklinde düşünüldüğü problemleri de içermektedir. Tablo 2’deki beşinci problemde, hamurun $\frac{1}{2}$ ’i ile kakaolu kek yapıldığı belirtilmektedir. Buna karşın

öğrenci problemin devamında geriye hamurun $\frac{1}{3}$ 'ünün kaldığını belirtmiştir. Öğrenci kurmuş olduğu problemde parçalar arasındaki ilişkiyi göz ardı etmiştir.

3.2. Öğretmenlerin Problemlerdeki Hatalara Yönelik Açıklamaları

Öğretmenlerin Tablo 2'deki birinci problemde yer alan H_3 , H_4 ve H_5 hatalarını belirleyebilmelerine ait dağılım Tablo 3'te sunulmuştur.

Tablo 3: Birinci Problemdeki Hataların Belirlenmesine Ait Dağılım

	H_3	H_4	H_5
Öğretmenler	Ö1, Ö7, Ö8, Ö9	Ö1, Ö2, Ö8, Ö10	Ö1, Ö3, Ö5, Ö6, Ö7, Ö8, Ö9

Tablo 3'e göre, Ö1 ve Ö8 problemde yer alan üç hata türünü de tespit edebilmişken, Ö4 hataların hiçbirini tespit edememiştir. Öğretmenler tarafından en fazla belirlenen hata türü H_5 'tir. Ö7'nin bu hata türüne yönelik açıklaması, $\frac{1}{2}$ tane yapışkan derken $\frac{1}{2}$ ile tane uyumlu gözüküyor. *Hani tane derken doğal sayı belirtmek gerekir. 1 tane 2 tane uyumlu olur da $\frac{1}{2}$ tane uygun olmuyor. Öğrenci daha önce doğal sayılarda toplama işlemini biliyor. Orda da tabi böyle problemler üretiyordu. Onunla ilişki kurmaya çalışmış olabilir şeklindedir.* Ö7 açıklamasında kesir sayılarının doğal sayılar gibi düşünülerek ifade edilemeyeceğini, tane ifadesinin doğal sayılar için uygun bir yaklaşım olduğunu belirtmiştir. Ö7, doğal sayılardaki alışkanlıkların kesir sayılarına aktarılma çabasını, bu durumun nedeni olarak görmektedir. Benzer şekilde H_5 hata türünü belirleyen öğretmenlerin tamamı açıklamalarında bu duruma vurgu yapmışlardır. Ö7 mülakatın devamında, *sonuçta yine kesir bulunacak ama onu da tane ile ifade ediyor. Benzer şekilde burada da sıkıntı var* şeklindeki açıklamasıyla H_3 hata türüne de vurgu yapmıştır.

H_5 hatasına yönelik açıklama yapan fakat H_3 hatasına değinmeyen Ö3, Ö5, Ö6'ya soru kökündeki kesir sayısına da doğal sayı anlamı yüklediği açıklaması yapılarak, bu hatayı göz ardı etmelerinin nedeni sorulmuştur. Öğretmenler; soru kökünde yer alan bu tür hataların daha gizli kaldığını, analizlerde problemin giriş kısmının daha fazla dikkat çektiğini ve genelde bir hataya daha fazla odaklanıldığını vurgulamışlardır. Ö5'in görüşleri, *ilk bakışta $\frac{1}{2}$ tane geliyor aklınıza. Soru kökü biraz daha geri planda kalıyor. Birden fazla hata olduğu zaman bir tanesine odaklanıyorsunuz ister istemez. Ondan bu tür hatalar gözden kaçabiliyor. Bulduğumuz hatalar belki de daha sıklıkla yapılan hatalar olduğu için de olabilir* şeklindedir.

Öğretmenlerin altısı, açıklamalarında H_4 hata türünü göz ardı etmişlerdir. Yapılan mülakatlarda öğretmenler, öğrencilerin $\frac{3}{4}$ kadar ifadesi ile yapışkanın $\frac{3}{4}$ 'ünü belirtmeye çalıştıklarını düşünmeleri nedeniyle bu durumu hata olarak belirtmediklerini ifade etmişlerdir. Ö3 bu duruma yönelik, *burada $\frac{3}{4}$ kadar derken aslında $\frac{3}{4}$ 'ü demek istiyor diye düşündüğümüz için oraya herhangi bir şey demedim. Birde başta tane hatası olunca oraya daha fazla odaklanıyorsun* şeklinde açıklama yapmıştır. Ö4 ise problemde hata olmadığını belirtmiştir. Yapılan mülakatta Ö4'e problemdeki hatalar açıklanmış ve bu hataların göz ardı edilmesinin nedenleri sorulmuştur. Ö4'ün açıklamaları, $\frac{1}{2}$ tane ifadesini kabul ederek hatasız deyince otomatikman sorulması istenen durumu da kabul etmiş oluyorsun. *Problemde en çok matematiksel ifadeler dikkat çekiyor. Sorunun ne demek istediğinin önüne geçiyor. Soruda $\frac{1}{2}$ 'yi görüyorsun, $\frac{3}{4}$ 'ü görüyorsun sonra arada toplama işlemi var. Problemde de toplam [soru kökündeki toplam kelimesi vurgulanmaktadır] ifadesini görüyorsun hemen topluyorsun. Aslında demek ki bu durum yeterli olmuyor* şeklindedir. Ö4'ün açıklamaları dikkate alındığında,

problemin verilen toplama işlemine uygunluğunu kavramsal açıdan analiz edemediği ve kesir sayıları ile toplama işleminin varlığını problem kurgusu için yeterli gördüğü anlaşılmaktadır. Başka bir ifadeyle, Ö4'ün kavramsal analiz yerine şekilsel yönden analize odaklandığı söylenebilir.

Tablo 2'deki ikinci problemde, öğretmenlerin tamamı toplanan ikinci kesir sayısının geriye kalan miktar üzerinden hesaplandığını dolayısıyla bu haliyle verilen toplama işlemini karşılamadığını belirtmişlerdir. Ö1'in yaptığı açıklamalar, *bir kere verilen işlemi problem karşılamıyor. $\frac{1}{2}$ 'sini harcayınca geriye $\frac{1}{2}$ 'si kalır. Geriye kalanın $\frac{3}{4}$ 'ü dediğinden, $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ olur. Burada da (verilen işlemde) çarpma işlemi yok şeklindedir.* H₁ hatasını tespit eden öğretmenlerin yedisi (Ö1, Ö2, Ö5, Ö6, Ö7, Ö9, Ö10) açıklamalarının devamında, $\frac{3}{4}$ kesir sayısının geriye kalan miktar üzerinden değil, başlangıçta toplanan para miktarı üzerinden ifade edilmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Ö1'in bu duruma yönelik görüşleri, *kalan paranın $\frac{3}{4}$ 'ünü değil, direkt olarak toplam paranın $\frac{3}{4}$ 'ünü demeliydi* şeklindedir. Öğretmenlere her bir problem cümlesine yönelik açıklamalarını tamamladıktan sonra bu problem cümlesi için parça-bütün ilişkisini göz ardı ettikleri belirtilerek bu durumun nedeni sorulmuştur. Bu konuda Ö6, *geriye kalan direkt verilen işlemin yapısına ters olduğundan hemen belirlenebiliyor. Bir de toplama olduğu için ekleme söz konusu. Dolayısıyla sözel ifadeleri sırayla okurken ekleme yerine çıkarma anlamı gelince [geriye kalan ifadesini vurgulamaktadır] orada duruyorsun. Kesirleri aynı bütün üzerinden ifade etmesi gerektiğinden burayı paranın $\frac{3}{4}$ 'ü şeklinde belirtmesi gerektiğini düşünüyorsun. O an işlem sonucunu hiç düşünmedim. Ben daha çok sözel ifadelerde bir yanlışlık var mı? diye düşündüm ve ona odaklandım* şeklinde görüş belirtmiştir. Ö6 açıklamasında, verilen işlemin toplama olduğunu buna karşın *geriye kalan* ifadesinin çıkarma işlemini akla getirdiğini, dolayısıyla hatanın hemen görülebildiğini belirtmiştir. Bu hatayı sergileyen diğer öğretmenlerde kesir sayılarının ifade edilmesine ve toplama işleminin karşılanmasına odaklandıklarını, buna karşın işlem sonucunu dikkate almadıklarını ifade etmişlerdir. Başka bir ifadeyle, kesir sayıları ve toplama işlemini ifade etmeye odaklı analizin parça-bütün ilişkisinin göz ardı edilmesine neden olduğu anlaşılmaktadır.

Tablo 2'de yer alan üçüncü problemde H₂ ve H₆ hataları bulunmaktadır. Ö3, Ö4 ve Ö8, problemdeki her iki hatayı da belirleyebilmiştir. Buna karşın Ö6, hataları belirleyememiştir. H₆ hatasını belirleyen öğretmenler (Ö3, Ö4 ve Ö8), toplamın tam sayılı kesir olması nedeniyle başlangıç miktarından daha büyük miktarın paylaştırılamayacağını belirtmişlerdir. Ö4 bu durumu, *bunları [kesir sayıları belirtilmektedir] topladığın zaman bir tamı geçiyor. Çikolatanın yarısını bana verse, $\frac{3}{4}$ 'ünü kardeşine veremeyecek. Orda bir mantık hatası var* ifadeleri ile açıklamıştır.

Tablo 2'deki üçüncü problemde öğretmenlerin çoğu (Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö7, Ö8, Ö9, Ö10), H₂ hatasını belirleyebilmiştir. Bu hata türüne yönelik Ö10 tarafından yapılan açıklamalar, *burada $\frac{1}{2}$ ile $\frac{3}{4}$ kesir sayılarının toplanması söz konusu. Öğrenci $\frac{1}{2}$ 'sini bana ve $\frac{3}{4}$ 'ünü kardeşine vermiş diyerek kesir sayılarını ifade etmiştir. Ama sonuçta bölüştürmeden önce çikolata ne kadardı? diye sormuş. Oysa toplama işlemi olması için çikolatanın ne kadarını bize verdiğini sorması lazım. Yoksa toplama işlemi olmaz* şeklindedir. Öğretmenler açıklamalarında, soru kökünün verilen işlemdeki kesir sayılarının toplamını yansıtmadığını belirtmişlerdir. Bu tür bir hatanın düzeltilmesi için de babanın her iki çocuğa çikolatanın toplam ne kadarını verdiğinin sorulması gerektiğini ifade etmişlerdir. H₂ hatasına yönelik açıklama yapan öğretmenlerin altısı, problem cümlesindeki H₆ hatasına değinmemiştir. Mülakatlarda öğretmenlere H₆ hatası açıklanarak, neden hata olarak değerlendirmedikleri sorulmuştur. Ö9'un yanıtı, *bütünü geçtiğimize dikkat etmedim. Aslında bütünümüzün sayısal bir karşılığı olsaydı mesela 24 olsaydı. Bunun $\frac{1}{2}$ 'sini*

alırdım sonra $\frac{3}{4}$ 'ünü alırdım. O zaman bütünü geçtiğini görebilirdim. Burada iki kesir var ve ikisini topluyoruz. Bir de şundan kaynaklı olabilir. Direkt işleme uygun bir problem kurmaya çalışıyoruz ama sonrasında problemin öğrencide neler yaratabileceğini, bütünü geçip geçmediğini çok fazla düşünmüyoruz. Problemin kavramsal yapısına çok inmiyoruz şeklindedir. Problemde, kesir sayılarının toplanması yerine bölüştürmeden önce çikolatanın ne kadar olduğu sorulmaktadır. Bu yönüyle H₂ hatası parça-bütün ilişkisine göre daha açık bir şekilde kendini göstermektedir. Ö9, başlangıç miktarının bilinmesi durumunda bu tür bir yanılgıya düşülmeyeceğini çünkü çözüm sürecinde bunun farkına varılabileceğini belirtmiştir. Buna karşın Ö9, başlangıç miktarının belirtilmediği durumlarda daha çok kesir sayılarının problemde karşılanması üzerine yoğunlaştığını ifade etmiştir. Bu ve benzeri diğer mülakatlardan, hata analizleri sürecinde öğretmenlerin, kesir sayıları ve toplama işleminin ifade edilmesine daha fazla odaklandıkları görülmüştür.

Bunun yanında Ö6, problemdeki her iki hatanın da farkına varamamıştır. Bu durumu, *babam çikolatanın yarısını ona veriyor. $\frac{3}{4}$ 'ünü de kardeşine veriyor. Bunda bir sıkıntı yok gibi. Babam bölüştürmeden önce çikolata ne kadardı? Hata göremedim* şeklinde açıklamıştır. Yapılan mülakatta, Ö6'ya problem cümlesindeki hatalar açıklanarak, bu hataları göz ardı etmesinin nedenleri sorulmuştur. Ö6'nın açıklamaları, *yarısını kullanınca geriye yarısı kalır. Evet, $\frac{3}{4}$ ondan daha büyük. Buna hiç dikkat etmemişim. Daha çok hatanın problemin sözel ifadelerinde olacağını, mesela kesir sayılarını oluşturmada olacağını düşündüğümüzden kesir sayıları ifade edilmiş mi ona bakıyoruz* şeklindedir.

Öğretmenlerin tamamı, Tablo 2'deki dördüncü problem cümlesinde toplanan ikinci kesir sayısının geriye kalan miktar üzerinden hesaplandığını, bu nedenle toplama işlemini karşılamadığını belirtmişlerdir. Öğretmenler açıklamalarının devamında, ikinci kesir sayısının geriye kalan para yerine başlangıçtaki para miktarı üzerinden ifade edilmesi durumunda hatanın giderilebileceğini belirtmişlerdir. Ö2'nin bu duruma yönelik açıklamaları, *paramın $\frac{1}{3}$ 'ü ile kola aldım diyor. Ancak geriye kalan paranın $\frac{1}{2}$ 'si ile gofret aldım demiş. O zaman çarpma işlemi olur. $\frac{1}{3}$ 'ü ile kola alırsa geriye $\frac{2}{3}$ 'ü kalır. Bu durumda $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ ile yani $\frac{1}{3}$ 'ü ile de gofret almış olur. Dolayısıyla işlem verilen işlem olmaz. Paranın tamamı üzerinden $\frac{1}{2}$ 'yi ifade etmeliydi* şeklindedir.

Tablo 2'de yer alan beşinci problemdeki H₂ ve H₆ hataları, Ö6 dışındaki bütün öğretmenler tarafından belirlenmiştir. Öğretmenler H₆ hatasına yönelik açıklamalarında, hamurun $\frac{1}{2}$ 'i ile kakaolu kek yapıldığında geriye $\frac{1}{3}$ 'i değil, yarısının kalacağını ifade etmişlerdir. H₂ hatasına yönelik açıklamalarda ise toplama işlemini karşılaması için soru kökünde hamurun kaçta kaçının kullanıldığının sorulması gerektiği belirtilmiştir. Ö8'in her iki hata türüne yönelik açıklamaları, *geriye kalan $\frac{1}{3}$ 'ü ile demiş. İyi de geriye zaten $\frac{1}{3}$ 'ü kalmaz ki. Burada yanıltmış öğrenci. Çocuk bütünden $\frac{1}{2}$ çıkınca $\frac{1}{3}$ kaldığını düşünmüş. Bu zaten hatalı. Annemin başlangıçta ne kadar hamuru vardır? demiş. Ne düşünmüş burada çocuk bilemem ama işlemdeki toplamayı karşılamıyor. Bunun yerine hamurun ne kadarının kullanıldığını sormalıydı* şeklindedir. Ö6 ise probleme yönelik yaptığı açıklamalarında, sadece H₆ hata türünü belirleyebilmiştir. Yapılan mülakatta Ö6'ya H₂ hata türü açıklanarak, bu hatayı belirleyememesinin nedenleri sorulmuştur. Ö6'nın açıklamaları, *ben geriye kalan kısma odaklandığım için bu kısmı [soru kökü belirtilmektedir] göz ardı ettim. Az öncede söylediğim gibi [Tablo 2'deki üçüncü maddeye yaptığı açıklamayı vurguluyor] bu tip durumlarda hatanın daha çok problemin sözel ifadelerinde olacağını, mesela kesir sayılarını oluşturmada yaşanacağını düşündüm. O yüzden daha çok buraya odaklandım* şeklindedir. Ö6 açıklamasında, problem cümlesinde yer alan H₆

hatasına odaklandığını, buna karşın soru köküne çok fazla dikkat etmediğini belirtmiştir. Ayrıca Ö6, bu tür analizlerde hatanın daha çok kesir sayılarını oluşturmada yaşanacağını düşünmektedir. Ö6, üçüncü problemdeki H_2 hatasını belirleyememe sebebini de benzer şekilde açıklamıştır. Bunun yanı sıra üçüncü probleme göre beşinci problemdeki H_6 hatasının öğretmenler tarafından daha kolay tespit edildiği görülmektedir. Her iki problemde de parça-bütün ilişkisinin oluşturulamaması söz konusu olmakla birlikte, beşinci problemde, *geriye kalan* ifadesinin kullanılması hatayı daha açık bir şekilde ortaya koymaktadır. Öğretmenlerin genellikle kurulan problemleri şekilsel yönden kelime kelime analiz etmelerinin, *geriye kalan* ifadesi ile yapılan hatanın belirlenme başarısını arttırdığı düşünülebilir.

Öğretmenlerin Tablo 2’de yer alan altıncı problemdeki H_3 , H_4 ve H_5 hatalarını belirleyebilmelerine ait dağılım Tablo 4’te sunulmuştur.

Tablo 4: Altıncı Problemdeki Hataların Belirlenmesine Ait Dağılım

	H_3	H_4	H_5
Öğretmenler	Ö1, Ö7, Ö8, Ö9	Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö7, Ö8, Ö9, Ö10	Ö1, Ö3, Ö4, Ö5, Ö7, Ö8, Ö9

Tablo 4’e göre H_4 , öğretmenler tarafından en fazla belirlenen hata türüdür. Bu hata türünde öğretmenler, $\frac{1}{2}$ topluyor ifadesi ile anlatılmak istenenin açık olmadığını, dolayısıyla hatalı olduğunu belirtmişlerdir. Ö3 bu duruma yönelik, *bu problemde Kadir $\frac{1}{2}$ topluyor ifadesinde, Kadir’in ne topladığı belli değil ama öğrencilerimiz bu tür ifadeleri çok kullanıyorlar* şeklinde açıklama yapmıştır. Bu hata türü, birinci problemdeki aynı hata türüne göre daha fazla belirlenmiştir. Öğretmenlerin birinci problemdeki $\frac{3}{4}$ kadar ifadesini öğrencinin, yapışkanın $\frac{3}{4}$ ’ü şeklinde algıladığını varsayarak hatasız kabul etmeleri, bu farkın sebebi olarak düşünülebilir. Öğretmenlerin yedisi, problem cümlesinde yer alan $\frac{1}{3}$ elma ifadesinin problem kurgusuna uygun olmadığını belirterek H_5 hatasını tespit etmişlerdir. Buna karşın sadece dört öğretmen H_3 hatasını belirleyebilmiştir. Üç hatayı da belirleyen Ö8’in açıklamaları, $\frac{1}{2}$ topluyor ile Kadir ağaçtaki elmaların yarısını mı toplamış yoksa başka bir şey mi ifade etmiş açık değil. Benzer şekilde $\frac{1}{3}$ elma topluyor ifadesi de yanlış. Kesirleri doğal sayılarla ifade edemeyiz. Sonuçta da toplam elma sayısı demiş. Benzer bir hata var. Yine kesir olduğu için ağaçtaki elmaların ne kadarını topladı şeklinde sorması lazım şeklindedir. Ö6 ise, *yarısını topluyor diğeri de üçte birini topluyor. Ne kadar topladığını soruyor. Bunda bir sıkıntı yok* şeklindeki açıklaması ile problem cümlesinde herhangi bir hata olmadığını belirtmiştir. Mülakatta Ö6’ya bu hataları belirtmemesinin nedenleri sorulmuştur. Ö6’nın açıklamaları, *yani $\frac{1}{2}$ ’sini topluyor anlamında düşündüm. Hani problemleri kurduruyorken daha çok öğrencinin işlemi karşılamasına odaklandığımız için onları kaçırmış olabilirim. $\frac{1}{3}$ elmada da aynı durum var, $\frac{1}{3}$ elma diyor. Orayı kabullendiğimiz için sondaki böyle bir hatayı da baştan kabullenmiş oluyoruz* şeklindedir.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

İlköğretim yedinci sınıf öğrencilerinin kesirlerle toplama işlemine yönelik kurdukları problemlerde, altı farklı hata türü tespit edilmiştir. Belirlenen hataların yapısı dikkate alındığında genel olarak hataların; kesir sayılarının uygun birimler ile ifade edilememesi, doğal sayılardaki alışkanlıkların kesir sayılarına genellenmesi ve kesir sayılarının belirttiği parça-bütün ilişkisinin anlaşılamaması üzerine odaklandığı görülmektedir. Başka bir ifadeyle problem kurmadaki

hataların, kesirlerin kavramsal boyutu üzerine yoğunlaştığı söylenebilir. Bu sonuç, Charalambous, Delaney, Mhuire, Hsu ve Mesa (2010) tarafından belirtilen kesir işlemlerine yönelik güçlüklerin, kesir öğrenimindeki güçlüklerden ayrı değerlendirilemeyeceği ve köklerinin kesir kavramlarına dayandığı sonucunu desteklemektedir.

Öğretmenlerin hatalı problemlere yönelik yaptıkları açıklamalar dikkate alındığında, hataları belirleyebilme başarılarının sadece bir hata içeren problem cümlelerinde daha yüksek olduğu (problem iki ve dörtte öğretmenlerin tamamı hatayı belirleyebilmiştir) tespit edilmiştir. Buna karşın üç hatayı içeren problemlerdeki başarıların (problem bir ve altıda üç hatayı da tespit eden öğretmen sayısı sırasıyla iki ve dördür) ise, daha düşük olduğu belirlenmiştir. Bu sonuçlar dikkate alındığında, hata sayısının artışına bağlı olarak öğretmenlerin hataları belirleyebilme başarılarının düştüğü söylenebilir. Yapılan mülakatlardan öğretmenlerin, kesir sayıları ve toplama işleminin problemde karşılanıp karşılanmadığına yönelik şekilsel analize odaklandıkları tespit edilmiştir. Buna karşın problem cümlelerinde yer alan hataların bir kısmı kesirlerin kavramsal boyutu ile ilişkilidir. Öğretmenlerin problem cümlelerini şekilsel yönden analiz etme eğilimlerinin diğer hataların göz ardı edilmesine neden olduğu düşünülebilir. Bu sonuçlar, Işık ve diğerlerinin (2012) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarıyla yaptıkları çalışmanın sonuçlarıyla benzerlik göstermektedir.

Problemlerdeki H_1 ve H_2 hatalarının belirlenebilme oranlarının diğer hatalara göre daha yüksek olduğu tespit edilmiştir. Bu hataların odağında, verilen işlemdeki kesir sayılarının ve toplama işleminin problemlere aktarılamaması yer almaktadır. Bu hatalar, verilen işlemin şekilsel yönü ile ilişkili iken, parça-bütün ilişkisinin kurulamaması, kesir sayılarına doğal sayı anlamı yüklenmesi, sonuca doğal sayı anlamı yüklenmesi ve birim kargaşası hata türlerinin kesirlerin kavramsal boyutu ile ilişkilidir. Dolayısıyla H_1 ve H_2 hatalarının daha fazla tespit edilmesi, şekilsel yönden analizlere ağırlık verildiğinin göstergesi olarak düşünülebilir. Hata sayısının az oluşuna bağlı olarak hataları belirleyebilme başarısının yüksek olduğuna yönelik sonuçlar, H_1 ve H_2 hatalarının tespitindeki başarının yüksek oluşunun diğer bir nedeni olarak düşünülebilir. Çünkü H_1 problemlerde tek hata olarak bulunmakta, H_2 ise iki hata içeren problemlerde yer almaktadır.

Problemlerde yer alan H_3 ve H_5 hata türleri, kesir sayılarına doğal sayı anlamı yüklenmesi ile ilişkili olmasına rağmen, H_3 hatasının belirlenme oranı H_5 hatasının belirlenme oranından daha düşüktür. Başka bir ifadeyle toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yüklenmesinin tespit edilme başarısı, işlem sonucuna doğal sayı anlamı yüklenmesinin tespit edilme başarısına göre daha yüksektir. Öğretmenlerin hataların daha çok problemin giriş kısmında kesir sayılarının ifade edilmesinde yaşanacağına yönelik inanışları, işlem sonucuna doğal sayı anlamı yüklenmesi hatasının göz ardı edilmesinin nedeni olarak düşünülebilir. Bunun yanı sıra bu hataları içeren problemlerdeki hata sayılarının yüksek oluşu da H_3 hatasının tespitindeki düşük başarının diğer bir nedeni olduğu söylenebilir.

Öğretmenlerin H_6 hatasını belirleyebilme başarılarının ise değişkenlik gösterdiği tespit edilmiştir. Beşinci problemde *geriye kalan* $\frac{1}{3}$ 'ü şeklindeki ifade de hata olduğu bütün öğretmenler tarafından belirlenmiştir. Bu hata türünde bir bütünün yarısı kullanıldıktan sonra geriye $\frac{1}{3}$ 'ünün kalamayacağı düşüncesi hatanın tespitini kolaylaştırmıştır. Buna karşın üçüncü problemde toplamın tamsayı kesir olduğunun tespit edilememesi, öğretmenlerin büyük bir çoğunluğu tarafından bu hatanın belirlenememesine neden olmuştur. Öğretmenler açıklamalarında bir hatayı düzeltirken farklı hatalar sergilemişlerdir. Öğretmenlerin, mülakatların devamında bütünün miktarının bilinmesi durumunda bu tür hataya düşmeyeceklerini ifade etmeleri, kesir sayılarının işlemci anlamını daha fazla ön plana çıkardıklarını düşündürmektedir. Ayrıca öğretmenler, kesir sayılarının ölçü anlamından ($\frac{3}{4}$ cm, $\frac{3}{4}$ kg gibi...) hareketle verilen işleme problem kurulabileceğine yönelik görüşlere yer vermemiştir.

Bu yönüyle öğretmenlerin, kesir sayılarının farklı anlamlarına yönelik sınırlı bilgiye sahip oldukları ve bu durumun öğrencilerde de kesirlere yönelik sınırlılıkları beraberinde getireceği düşünülebilir. Kerslake (1986), öğrencilerin kesirlere yönelik yaşadıkları güçlüklerin temelinde kesirlerin bir sayı olarak algılanamamasının, bunun yerine daha çok bir şeklin/bütünün belli bir kısmı veya bir miktarı şeklinde görülmesinin yer aldığını belirtmiştir. Öğretmenlerin yaptıkları açıklamalarda, bu anlayışın dışına çıkmadıkları ve sürekli çokluklar üzerinden alternatif problemler kurulabileceğine yönelik görüş belirtmedikleri tespit edilmiştir. Bu yönüyle öğretmenlerde görülen bu anlayışın, öğrencilerinin kesirlerde güçlük yaşamalarına neden olabileceği düşünülebilir. Buna karşın ders ortamlarında kesirlerin farklı anlamlarını içeren etkinliklere yer verilmesinin, öğrencilerin kesirlere yönelik kavramsal anlamalarını geliştirmede katkı sağlayacağı belirtilmektedir (Olkun ve Toluk, 2003).

Öğretmenlerin tespitinde güçlük yaşadıkları diğer bir hata türü birim kargaşasıdır. Problemlerde, öğrencilerin toplanan kesir sayılarını uygun birimlerle ifade edemedikleri (örn., $\frac{3}{4}$ kadar veya $\frac{1}{2}$ topluyor gibi), öğretmenlerin ise bu hatayı tespit etmede zorlandıkları görülmüştür. Altıncı problemdeki birim kargaşasını belirleyebilen öğretmen sayısı, birinci problemdeki aynı hata türünü belirleyebilen öğretmen sayısına göre daha yüksektir. Altıncı problemde, $\frac{1}{2}$ topluyor ifadesiyle anlatılmak istenenin açık olmamasının, öğretmenlerin bu hata türünü daha kolay tespit etmelerine yardımcı olduğu söylenebilir. Öğretmenler, $\frac{1}{2}$ topluyor ifadesinin anlamlı olabilmesi için ağaçtaki elmaların $\frac{1}{2}$ 'i şeklinde düzeltilmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Buna karşın $\frac{3}{4}$ kadar ifadesinde yer alan birim hatasının tespitinde öğretmenler daha fazla güçlük yaşamışlardır. Öğretmenlerin, öğrencilerin bu tür bir ifadeyle yapışkan miktarının $\frac{3}{4}$ 'ünü belirttiklerini düşünmeleri, bu hatayı göz ardı etmelerinin önemli bir nedenidir. Öğrencilerin bireysel farklılıkları dikkate alındığında, öğretmenlerin ders ortamlarında olası kavram yanlışlarına sebebiyet vermemesi için kesirlerin uygun birimler ile ifade edilmesine yönelik dönütler vermesi önemlidir. Bunun yanı sıra, öğrencilerin matematiksel iletişim becerilerini geliştirmek için öğretmenler matematiksel terminoloji ve dile uygun sözel ifadelerin kullanımına büyük özen göstermelidir. İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı'nda (MEB, 2009) matematiğin sembol ve terimlerinin kendi içinde, farklı disiplinlerde ve öğrencinin yaşantısında uygun ve doğru bir biçimde kullanılmasına, matematikle uğraşma sürecinde ve sonrasında sözlü anlatımlardan yararlanılmasına önem verilmektedir. Şüphesiz öğretmenlerin, $\frac{3}{4}$ kadar gibi ifadeleri hatasız kabul ederek açıklama yapmamaları, öğrencilerin matematiğin sembol ve terimlerini uygun ve doğru bir biçimde kullanabilme becerilerinin gelişimi önünde engel oluşturabilecektir.

Kavram yanlışlarının araştırılması ve sorgulanması, öğrencilere hatalarını tanımlamalarında ve kavramsal anlamalarının geliştirilmesinde rehberlik etmektedir (An, Kulm ve Wu, 2004; Carroll, 1999). Borasi (1987) ise hataların, öğrenci güçlüklerini teşhis etmede ve gidermede güçlü bir araç olabileceğini belirtmiştir. Buna karşın çalışma, öğretmenlerin öğrencilerin kurdukları problemlerdeki hataları belirleyebilmede güçlükler yaşadıklarını ortaya koymuştur. Bunun yanında araştırmacılar (Işık ve Kar, 2012b; Işık ve diğerleri, 2013; McAllister ve Beaver, 2012; Osana ve Royea, 2011), öğrenciler veya öğretmen adaylarının kurdukları problemlerde, parça-bütün ilişkisinin kurulamaması, kesir sayılarına doğal sayı anlamı yüklenmesi ve birim kargaşası hatalarını daha fazla sergilediklerini ortaya koymuşlardır. Bu araştırmada ise, öğretmenlerin problemlere yönelik yaptıkları açıklamalarda bu hataları tespit etmede de daha fazla güçlük yaşadıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Bu çalışmanın sonuçları, öğretmenlerin kesirlerle toplama işlemine yönelik problemlerdeki hataları belirleyebilme becerilerinin geliştirilmesi gerektiğini ortaya koymuştur. Bu amaçla hizmet içi dönemde, öğretmen-araştırmacı işbirliğiyle, gerek öğretmenlerin gerekse

ilköğretim öğrencilerinin kurdukları problemler analiz edilerek hataların ardındaki kavramsal eksiklikler tartışılabilir. Bunun yanında, bu tür öğrenme ortamlarından edinilen bilgi ve deneyimlerin sınıf içi yansımaları gözlemlenebilir ve bu gözlemler öğretmen-araştırmacı işbirliğiyle analiz edilebilir. Benzer bir süreç, hizmet öncesi dönemde öğretmen adaylarıyla da yürütülebilir. Edinilen bilgi ve deneyimlerin yansımaları, okul uygulamalarında gözlemlenerek, gözlem sonuçlarının öğretmen adaylarıyla tartışması yaptırılabilir. Bu çalışma sonuçları, kesirlerle toplama işlemine yönelik hazırlanan altı hatalı problemde elde edilmiştir. Bu durum çalışmanın sınırlılığı olarak düşünülebilir. Farklı hatalı problemler üzerinden çalışmanın kapsamı genişletilebilir. Bunun yanında, öğrencilerin kesirlerle toplama işlemine yönelik kuracakları problemlerden olası diğer hata türleri de tespit edilebilir. Tespit edilebilecek hatalı problemlere yönelik öğretmenlerin nasıl düşündükleri de belirlenebilir. Bu çalışmanın on öğretmen ile yürütülmüş olması ve sadece yarı-yapılandırılmış görüşme tekniğinin kullanılması diğer bir sınırlılık olarak düşünülebilir. Daha fazla öğretmenle gözlem gibi farklı veri toplama araçları da kullanılarak benzer araştırmaların yapılması, bu çalışma sonuçlarının geçerliğini güçlendirebilecektir.

5. KAYNAKLAR

- An, S., Kulm, G., & Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school mathematics teachers in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7(2), 145-172.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 1-8.
- Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 401-421.
- Cankoy, O. ve Darbaz, S. (2010). Problem kurma temelli problem çözme öğretiminin problemi anlama başarısına etkisi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 38, 11-24.
- Carroll, W. M. (1999). Using short questions to develop and assess reasoning. In L. Stiff (Ed.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12: 1999 NCTM yearbook* (pp. 247-253). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12, 117-151.
- Chick, H. L., & Baker, M. K. (2005). Investigating teacher's responses to student misconceptions. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2, pp. 249-256). Melbourne:PME.
- Corbin, J. M., & Strauss, A. C. (2007). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Thousand Oaks, CA: Sage Publication.
- Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal Mathematics Teacher Education*, 11, 395-415.
- Dickerson, V. M. (1999). *The impact of problem posing instruction on the mathematical problem solving achievement of seventh graders*. Unpublished doctoral dissertation. University of Emory, Atlanta.
- English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 83-106.
- Fuller, R. A. (1996). *Elementary teachers' pedagogical content knowledge of mathematics*. Paper presented at the Mid-Western Educational Research Association Conference, Chicago, IL.
- Gonzales, N. A. (1998). A blueprint for problem posing. *School Science and Mathematics*, 94(2), 78- 85.
- Işık, C. (2011). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde çarpma ve bölmeye yönelik kurdukları problemlerin kavramsal analizi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 41, 231-243.
- Işık, C. ve Kar, T. (2012a). Matematik dersinde problem kurmaya yönelik öğretmen görüşleri üzerine nitel bir çalışma. *Milli Eğitim Dergisi*, 194, 199-215.

- Işık, C. ve Kar, T. (2012b). 7. sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine kurdukları problemlerin analizi. *İlköğretim Online*, 11(4), 1021-1035. [Online] <http://ilkogretim-online.org.tr/>, 30/05/2012 tarihinde indirilmiştir.
- Işık, C., Kar, T., Işık, A. ve Güler, G. (2012). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde toplama işlemine yönelik kurulan problemlerdeki hataları belirleyebilme becerileri. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 3(3), 161-182.
- Işık, C., Öcal, T., & Kar, T. (2013). *Analysis of pre-service elementary teachers' pedagogical content knowledge in the context of problem posing*. Paper presented at the meeting of Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8), Antalya.
- Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor, England: NFER-Nelson.
- Kılıç, Ç. (2013a). Pre-service primary teachers' free problem-posing performances in the context of fractions: An example from Turkey. *The Asia-Pacific Education Researcher*, 1-10.
- Kılıç, Ç. (2013b). Sınıf öğretmeni adaylarının farklı problem kurma durumlarında sergilemiş oldukları performansın belirlenmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 13(2), 1195-1211.
- McAllister, C. J., & Beaver, C. (2012). Identification of error types in preservice teachers' attempts to create fraction story problems for specified operations. *School Science and Mathematics*, 112(2), 88;98.
- Mcmillan, H. J., & Schumacher, S. (2010). *Research in education*. Boston, USA: Pearson Education.
- Milli Eğitim Bakanlığı[MEB], (2009). *İlköğretim matematik dersi 6-8. Sınıflar öğretim programı ve kılavuzu*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standard for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Olkun, S. ve Toluk, Z. (2003). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi*. Ankara, Anı yayıncılık.
- Osana, H. P., & Royea, D. A. (2011). Obstacles and challenges in preservice teachers' explorations with fractions: A view from a small-scale intervention study. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30, 333-352.
- Özmantar, M. F. ve Bingölbali, E. (2009). Sınıf öğretmenleri ve matematiksel zorlukları. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 8(2), 401-427.
- Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. In A. McIntosh, & N. Ellerton (Eds.), *Research in mathematics education: A contemporary perspective* (pp.164-185). Perth: MASTEC Publication.
- Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education*, 25(1), 166-175.
- Toluk-Uçar, Z. (2011). Öğretmen adaylarının pedagojik içerik bilgisi: Öğretimsel açıklamalar. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 2(2), 87-102.
- Ward, J., & Thomas, G. (2007). What do teachers know about fractions? In *Findings from the New Zealand Numeracy Development Projects* (pp. 128-138). Wellington: Learning Media.

Extended Abstract

Gonzales (1998), highlighted that the success of problem posing activities depended on the guidance to be provided by teachers for their students in posing and discovering accurate problems. Teachers' content knowledge covers both determination of students' errors based on given activities and conception explanation of their reasons for these errors (Ball, Thames, and Phelps, 2008). Considering that feedback for the errors likely to be made by the students will be provided in the teaching process, studying the opinions of teachers for incorrect problem sentences gains more importance. In this context, this study aims at presenting the opinions of elementary school mathematics teachers on the incorrect problem sentences posed by the seventh grade students of an elementary school, with regard to addition of fractions.

The case study method, one of the qualitative research methods, has been used in the study. The study was conducted with 210 students receiving education at the seventh grades of seven elementary schools located in the city center of Erzurum province and 10 elementary school mathematics teachers. The teachers involved in the study were selected on the basis of the *criterion sampling* method. Data for the research have been collected in two stages. At the first stage, the Problem Posing Test (PPT), prepared for addition of fractions, was applied to the seventh grade students of an elementary school. In the PPT,

two items as $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = ?$ ve $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = ?$, respectively, were included for the addition of two proper fractions. At the second stage, data were collected by applying the interview form, which includes six incorrect problems, to the teachers. The data obtained from both stages of the study has been analyzed through *categorical analysis* technique, listed under the *content analysis* types. Remarks of the teachers have been analyzed in accordance with the categories of errors observed in the problem sentences. In addition, other errors made by the teachers in their remarks have also been presented through content analysis.

Six errors were determined in the problems posed by seventh grade students. These are: expressing the added second fraction over the rest from the whole, failing in expressing the operation in the question root, attributing natural number meaning to the result of the operation, confusion about units, attributing natural number meaning to the added fractional numbers, failing in establishing part-whole relation. In general, errors seem to have focused on the inability to denote fractions in proper units, generalizing the practices on natural numbers to fractions and failure in establishing part-whole relation. In other words, it would not be wrong to say that the errors made in problem posing concentrate on the conceptual dimension of fractions. This result supports another result asserting that the challenges of fractional operations, as stated by Charalambous, Delaney, Mhuire, Hsu and Mesa (2010), cannot be evaluated separately from the challenges of learning fractions and that they rooted in fractional concepts.

Researching and questioning conceptual errors guide students in defining their errors and developing their conceptual understandings (An, Kulm and Wu 2004; Carroll, 1999). Borasi (1987), on the other hand, stated that errors could be a strong tool for identifying and overcoming student challenges. Nevertheless, the study revealed that teachers had trouble identifying the errors made by students in the problems they posed. This result is supported by teachers' showing a lower rate of success in problem sentences that include more than one error and by their making newer errors in their explanations regarding the students' errors. The fact that teachers' explanations for the errors included newer errors can have a negative influence on the students' conceptual understanding. Such feedback to be provided by teachers on the posed problems might not only eliminate some errors, but also bring along some other errors.

The results of this study revealed the need of developing the teachers' skills of determining the errors in the problem sentences for the addition operation in fractions. The results of this study were obtained thanks to the six erroneous problem sentences drawn up for the addition operation in fractions. This situation can be seen as the limitedness of the study. The scope of the study may be widened via the situations including different erroneous problems. Furthermore, other potential error types may be detected through the problems to be posed by the students for the addition operation in fractions. Teachers' opinions on the erroneous problem sentences likely to be detected may be determined as well. The facts that this study was conducted with ten teachers and only the semi-structured interview technique was used may be seen as the other limitedness of the study. Similar studies to be conducted with a greater number of teachers using different data collection tools such as observation may strengthen the validity of the results of this study.

Kaynakça Bilgisi

Kar, T. ve Işık, C. (2015). İlköğretim Matematik Öğretmenlerinin Öğrencilerin Kurdukları Problemlere Yönelik Görüşlerinin İncelenmesi: Kesirlerle Toplama İşlemi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi* [Hacettepe University Journal of Education], 30(1), 122-136.

Citation Information

Kar, T. ve Işık, C. (2015). İlköğretim Matematik Öğretmenlerinin Öğrencilerin Kurdukları Problemlere Yönelik Görüşlerinin İncelenmesi: Kesirlerle Toplama İşlemi. [in Turkish]. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi* [Hacettepe University Journal of Education], 30(1), 122-136.